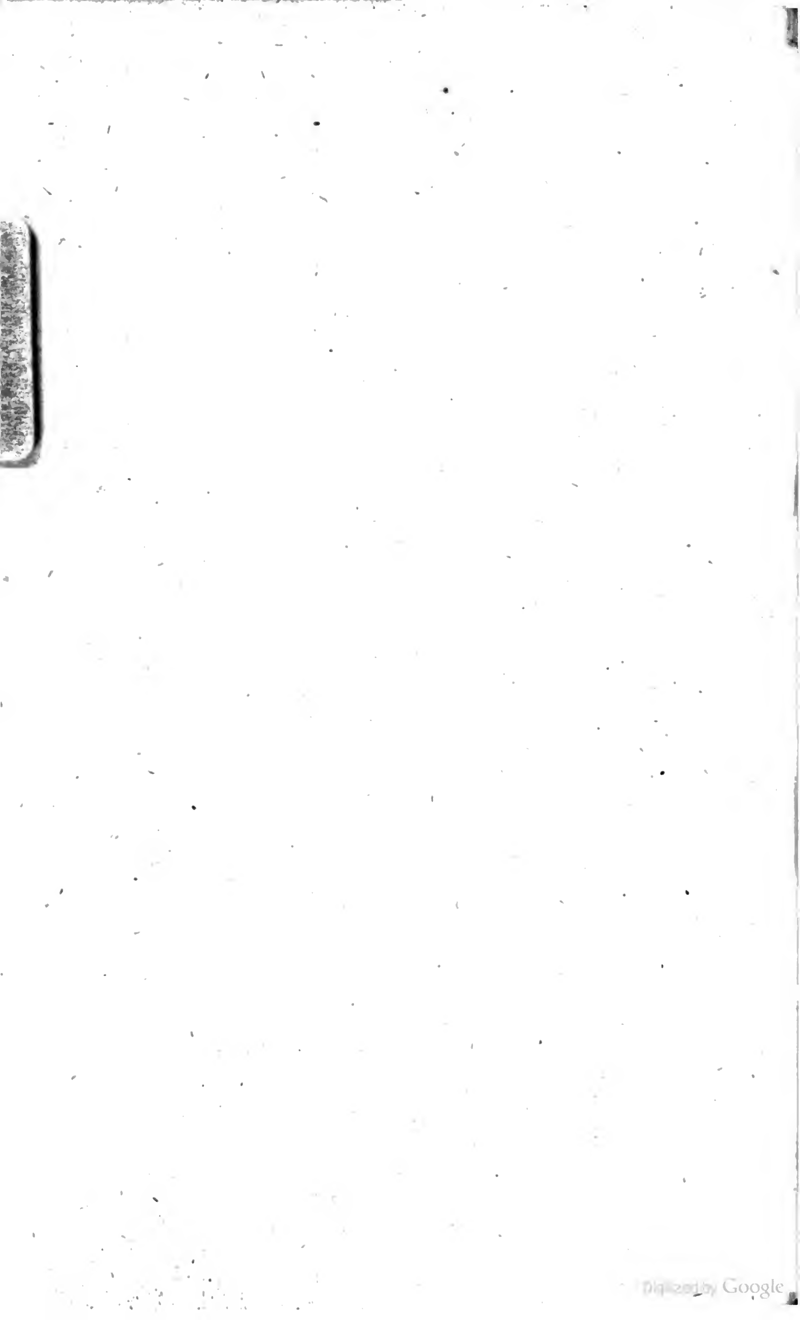
THEORIE DER AËRONAUTIK, ODER MATHEMATISCHE...

C. J. M. von LACZYNSKI





Theorie der Aëronautik

oder

mathematische Abhandlung

über

die Leitung der Aërostaten

durch

Ruder, Segel und comprimirte Luft.

Von

C. J. M. v. Lgczynski.

Mit Zeichnungen auf vier Blättern.

Mohrungen, 1833.
Verlag der Schulbuchhandlung.
(*C. L. Rautenberg.*)
Paris,
bei *Bossange* père.
London,
bei *Bossange, Barthes & Lowell.*


BRITISH MUSEUM

Inhalt.

---

§. 1.

Der Widerstand der Luft wird bei horizontaler Bewegung eines Aërostaten bedeutend vermindert, wenn man demselben die Form eines verlängerten, an beiden Enden zugespitzten Sphäroids giebt.

Der Körper, Fig. 1. Tafel 1., stelle demnach einen Aërostaten vor und sey aus der Umdrehung des Kreissegments $ACBA$ um die Sehne AB erzeugt; die grösste Breite des Sphäroids betrage sechszehn, die Länge einhundert und sechszig pariser Fuss; und die Bewegung desselben geschehe in der Richtung der Achse BA. Ist die Hülle dieses Aërostaten aus gefirnisstem luftdichtem Taffet verfertigt und mit gereinigtem Wasserstoffgas gefüllt, so wird die Hebekraft desselben, bei mittlerer Dichtigkeit der Luft, beiläufig 800 Pfund betragen.

Die erste Figur stelle den Aufriss des Aërostaten mit der Gondel, die zweite Figur aber den Grundriss der Gondel vor.

Der mittlere Theil der Gondel diene zum Aufenthalt der Aëronauten und sey zu diesem Behuf aus

einem starken Flechtwerk; die zugespitzten Ansatzstücke *BHD*, *GIA*, Fig. 2., aber seyen aus einem leichten hölzernen Gerippe construirt, und das Ganze von Aussem mit einem Überzuge von lackirtem Leder überzogen.

Vier Fenster an den Seiten der Gondel erhellen das Innere derselben; zum Einsteigen in die Gondel aber diene die Thür *a'b'* Fig. 1.

In der Gondel sey bei *a*, Fig. 2., ein Tisch befestigt, in der Tischplatte desselben aber sey ein vertical stehendes Fernrohr dergestalt angebracht, dass die Röhre mit dem Ocularglase über die Tischplatte horvorrage, die Röhre mit dem Objectivglase hingegen in einer runden Öffnung im Boden der Gondel befestigt sey.

Dies Fernrohr dient zur Beobachtung der scheinbaren Bewegung der irdischen Gegenstände, um die Richtung der Bewegung des Aërostaten hieraus beurtheilen zu können.

Das Flügelrad *G*, Fig. 1., wird durch das vertical stehende Wellrad bei *g*, Fig. 2., mittelst eines Doppelseils ohne Ende von der Gondel aus in Umlauf gesetzt.

An der Peripherie der Wellräder *e*, *c*, Fig. 1. Tafel II., sind die Ankerseile befestigt; diese gehen dann bei *k*, *h* über zwei Kloben an dem Äquator

des Aërostaten und haften mit ihren beiden andern Enden an einer Stange, welche den Anker *n* trägt. Ein Seil ohne Ende ist um das Rad *A* und um die Wellräder *e*, *c* zu dem Behuf gelegt, um durch diese Vorrichtung den Anker von der Gondel aus heben oder herabsenken zu können.

Eine Treppe bei *h*, Fig. 2. Tafel I., führt aufs Verdeck der Gondel. An der äusseren Oberfläche des Aërostaten sey ein Netz und ein damit verbundenes hölzernes Gerippe befestigt, woran die Gondel und das Flügelrad hängt. Die Gurte, welche die Gondel tragen, sind an den Trägern *ml*, *ik*, *no*, *pq*, Fig. 2., mit ihren Enden befestigt.

Die Länge des mittleren Theils *AGBD* der Gondel beträgt dreizehn, die grösste Breite neun, die Tiefe aber sechs und einen halben Fuss. Die Breite der Gondel verhält sich zu ihrer Länge wie 1 zu 7.

§. 2.

Die Vorrichtung, wodurch das Flügelrad von der Gondel aus in Umlauf gesetzt wird, ist im Profil, Fig. 1. Tafel II., vorgestellt. Das Flügelrad besteht aus vier Flügeln oder Ruderflächen *a*, *d*, *f*, *g*, in Form gleichschenkliger Dreiecke, welche mit ihren Spitzen um eine Welle unter einerlei Winkel dergestalt neben einander befestigt sind, dass jedes Paar

der in entgegengesetzter Lage befindlichen Ruderflächen sich gegenseitig durchkreuzen. Vortheilhafter kann jedoch das Flügelrad construirt werden, wenn die dreieckigen Ruderflächen hinter einander befestigt würden; denn so wird der Wind nur aufs vorderste Paar Flügel einwirken. Das Wellrad *B*, Fig. 1. Tafel II., ist mit dem Wellrade *g*, Fig. 2. Tafel I., durch ein Doppelseil ohne Ende verbunden. Da das Wellrad *B* an der Welle des Flügelrades befestigt ist, so wird dies in Umlauf gesetzt, wenn man die Kurbel bei *g* dreht. Das Doppelseil ohne Ende, wodurch die Wellräder *B*, *g* in Verbindung stehen, wird in die Peripherie der Wellräder sicherer eingreifen, wenn, nach Fig. 2. Tafel II., die beiden parallelen Seile in gleichen Abständen durch Querstäbchen mit einander verbunden sind; an der Peripherie der Wellräder aber zwei Reihen hölzerner Stifte mit abgerundeten Köpfen befestigt würden.

Zwischen dem Aërostaten und der Gondel sey ein Seil ausgespannt, woran das dreieckige Segel, Fig. 1. Tafel I., aufgezogen wird; durch Seile kann dies Segel von der Gondel aus in die erforderliche Lage gebracht werden.

Der Aërostat, Fig. 1. Tafel I., ist mit zwei Steuerrudern versehen. Das dreieckige Steuerruder bei *I* besteht aus einem leichten Rahmen, der mit

gefirnisstem Taffet überspannt ist und durch hölzerne Stützen bei K, sowie durch ein Gegengewicht bei L in der erforderlichen Lage erhalten wird. So lange der Aërostat die Geschwindigkeit des Windes noch nicht erlangt hat, wird die Achse desselben vermöge dieses Steuerruders in der Richtung des Windes verharren.

Bei Windstille sowohl, als auch dann, wenn der Aërostat die Geschwindigkeit des Windes bereits erlangt hat, dient das zweite Steuerruder bei H, Fig. 1. Tafel I. Dies Steuerruder ist ein dreieckiger Flügel, der mit seiner Spitze an der Welle my unter einem Winkel von $35\frac{1}{4}$ Grad befestigt ist und bei z ein Gegengewicht hat. Die Welle my, woran der Flügel haftet, hängt im Bügel $mz'y$, dieser aber lässt sich um den Punkt z' durch die Seile on, ql seitwärts drehen. Stellt man den Bügel mittelst dieser Seile dergestalt, dass die Ebene $mz'y$ auf die verlängerte Ebene $ACBA$ senkrecht ist, und setzt dann den Flügel durch das Doppelseil ohne Ende, mi, in Umlauf, so wird der Aërostat um die Verticale CD sich drehen. Das Seil ohne Ende ist bei m um die Welle des Flügels, in der Gondel aber um eine Walze mit einer Kurbel dergestalt geführt, dass, wenn die Kurbel gedreht wird, der Flügel bei H sich zugleich dreht. Soll die Drehungs-

bewegung des Aërostaten um seine Verticale sistirt werden, so drehe man den Flügel einige Male in entgegengesetzter Richtung und bringe ihn dann in eine solche Lage, dass seine Ebene mit der Ebene *ACBA* parallel sey.

Das rechtwinklig-dreieckige Steuerruder bei *I* hat eine Höhe von 5 Fuss, eine Grundlinie von 30 Fuss; mithin eine Oberfläche von 75 □Fuss; das kleinere Steuerruder bei *H* aber ist ein gleichschenkliges Dreieck von 4 Fuss Höhe, 4 Fuss Grundlinie und 8 □Fuss Oberfläche.

Ist der Aërostat nur zum Theil mit Wasserstoffgas gefüllt, so wird man auch ohne Beihülfe eines Ankers von einer bestimmten Höhe den Aërostaten wieder herabsenken können. Denn man bringe zu diesem Behuf über der Decke der Gondel ein horizontales Flügelrad an; gebe diesem Flügelrade vier an einer vertical stehenden Welle befestigte gleichschenklig-dreieckige Flügel, sodass diese Flügel in der Art um die Welle geordnet sind, wie es bei dem bereits beschriebenen Flügelrad *G* der Fall ist. Wird dies vertical stehende Flügelrad von der Gondel aus in der gehörigen Richtung in Umlauf gesetzt, so wird der Aërostat nach und nach steigen oder sinken, je nachdem man das Flügelrad dreht. Statt vier, gebe man dem Flügelrad mehrere, etwa zehn, Flügel; denn

so dürfte jeder Flügel bei einer Grundlinie von 2 Fuss nur eine Höhe von 3 Fuss haben, damit die Oberfläche sämmtlicher Flügel 30 □ Fuss betrage, welches zu diesem Zwecke hinreichend ist.

§. 3.

Der aëronautische Compass, Fig. 1. Tafel III., bestehe aus einer runden Glasscheibe *ABCDA*, worauf eine gerade Linie *ab* im Durchmesser der Scheibe eingeätzt ist. Auf dieser Glasscheibe sey im Mittelpunkte derselben ein Stift befestigt, worauf die Magnetnadel *de* spielt; unter der Glasscheibe liege ein in Grade eingetheilter Ring an, worauf ein dünner Silberdraht im Durchmesser des Ringes aufgespannt und am Rande desselben befestigt ist. Das Objectivrohr *LG*, Fig. 2., eines astronomischen Fernrohrs sey mit dem einen Ende, wo das Objectivglas befindlich ist, im Boden der Gondel, in der Öffnung *FG*, befestigt; mit dem andern Ende aber gehe das Rohr durch eine Öffnung in der Tischplatte *OQ*. Bei *L*, *K* sey am innern Rande des Objectivrohrs der obige Ring dergestalt befestigt, dass der Silberfaden *fg*, Fig. 1., mit der Achse *AB* des Aërostaten, Fig. 1. Tafel I., parallel verbleibe, wenn der Aërostat um seine Verticale gedreht würde. Die Glasscheibe mit der darauf spielenden Magnetnadel ist

im Ocularrohre $DBCPAE$, Fig. 2. Tafel III., im Brennpunkte des Ocularglases, befestigt. Dreht man demnach die Ocularröhre um ihre Achse, so wird zugleich die Glasscheibe mit der darauf eingeätzten Linie sich drehen, indess die Magnetnadel in ihrer Lage verharrt; dreht aber der Aërostat mit der Gondel sich um die Verticale, so wird der Silberfaden fg um den Mittelpunkt des Ringes sich drehen und den Winkel angeben, welchen die Achse des Aërostaten mit der Richtung der Magnetnadel bildet.

Um den Gebrauch des aëronautischen Compasses nachzuweisen, nehme man an: der Aërostat bewege sich in der Richtung und mit der Geschwindigkeit des Windes; und es sey bL, Fig. 3. Tafel III., die Geschwindigkeit, welche der Aërostat in der Richtung seiner Achse durch das arbeitende Flügelrad annehmen würde; bN sey die Richtung und Geschwindigkeit des Windes; LbN aber sey der Winkel, welchen beide Seitengeschwindigkeiten bL, bN mit einander machen: so wird die Bewegung des Aërostaten in der Richtung und mit der Geschwindigkeit bI erfolgen; mithin wird die Richtung seiner Bewegung um den Winkel IbN von der Richtung des Windes abweichen.

Es sey nun

$$bN = C,\ bL = c,\ IbN = \varphi,\ LbN = \psi;$$

so ist

$$If = c \,.\, \text{sin.}\, \psi; \quad bf = C - c \,.\, \text{cos.}\, \psi;$$

mithin

$$\text{tang.}\, \varphi = \frac{c \,.\, \text{sin.}\, \psi}{C - c \,.\, \text{cos.}\, \psi}.$$

Ist aber ψ ein spitziger Winkel, so wird

$$\text{tang.}\, \varphi = \frac{c \,.\, \text{sin.}\, \psi}{C + c \,.\, \text{cos.}\, \psi};$$

mithin wird man für beide Fälle die folgende Gleichung haben:

$$a \ldots \text{tang.}\, \varphi = \frac{c \,.\, \text{sin.}\, \psi}{C \mp c \,.\, \text{cos.}\, \psi}.$$

Nach dieser Formel könnte zum praktischen Gebrauch eine Tafel construirt werden. Denn man berechne zuvörderst den Werth von c nach der Formel $d \ldots$ des zehnten Abschnitts dieses Aufsatzes, oder bestimme diesen Werth aus Versuchen; nehme hierauf verschiedene Werthe für ψ und für C an; berechne dann nach der Formel $a \ldots$ die zustimmenden Werthe von φ und schreibe die Werthe von φ, C und ψ in tabellarischer Ordnung auf. Die Mittelwerthe von ψ können hierauf durch Einschalten gesucht werden.

In dem Falle, wenn $c > C$, wird die Bewegung des Aërostaten unter einem bedeutenden Abweichungswinkel von der Richtung des Windes bewerkstelligt

werden können. Soll z. B. die Richtung der Bewegung des Aërostaten mit der Richtung des Windes einen rechten Winkel machen, so ist

$$\varphi = 90°,\ \text{tang.}\ \varphi = \infty,\ C - c\,.\,\text{cos.}\ \psi = 0;$$

mithin wird in diesem Falle

$$\text{cos.}\ \psi = C : c.$$

Hat man die Werthe von C, φ, ψ in eine Tafel gebracht, so kann in nachstehender Art vom aëronautischen Compass Gebrauch gemacht werden. Es sey, wie oben, bN, Fig. 3. Tafel III., die Richtung und Geschwindigkeit des Windes, und man will den Aërostaten von b nach I hinleiten, so beobachte man zuvörderst die Geschwindigkeit des Windes und die Abweichung seiner Richtung von der Richtung der Magnetnadel, dann setze man den Mittelpunkt einer Boussole auf den Punkt b einer Karte, worauf die Örter b und I bemerkt sind, und nehme den Winkel $IbN = \varphi$. Hierauf suche man in der Tafel für die bekannten Grössen φ, C, c den zustimmenden Winkel ψ; lasse dann den Aërostaten vermittelst des Flügels H, Fig. 1. Tafel I., durch einen Gehülfen in der gehörigen Richtung um seine Verticale drehen, bis der Winkel ceg, welchen der Silberfaden fg, Fig. 1. Tafel III., mit der Richtung der Magnetnadel macht, gleich sey dem Winkel $Lbc = \psi + Nbc$, Fig. 3.

Wird nun die Drehungsbewegung des Aërostaten sistirt, wozu man sich des Flügels *H* bedient; das Flügelrad *G* aber in Umlauf erhalten: so wird der Aërostat von *b* nach *I* mit zusammengesetzter Bewegung seinen Lauf nehmen.

Ist der Winkel *IbN*, Fig. 3., bekannt, so würde man dem Aërostaten auch bloss durch Versuche die gehörige Richtung geben können. Denn man stelle den aëronautischen Compass dergestalt, dass der Winkel *Cec*, Fig. 1., gleich sey dem Winkel *Ibc*, Fig. 3. Tafel III.; lasse nun den Aërostaten um seine Verticale in der gehörigen Richtung drehen, zugleich aber denselben in progressiver Bewegung erhalten. Indess suche man das Ocularrohr mit der darin befindlichen Glasscheibe in einer solchen Lage zu halten, dass der Winkel *Cec* unverändert verbleibe, und sistire die Drehungsbewegung des Aërostaten, sobald man bemerkt, dass die irdischen Gegenstände in der Richtung *AC*, Fig. 1. Tafel III., sich bewegen.

§. 4.

Da die Hülle des Aërostaten biegsam ist und Zusammenziehungskraft besitzt, so muss diese mit Wasserstoffgas gefüllte Hülle eine solche Form haben, dass in jedem Punkte der Hülle des Aërostaten

das Moment der Zusammenziehungskraft dem Momente der verstärkten Federkraft des eingeschlossenen Gases gleich und entgegengesetzt sey. Ist ferner die Oberfläche des Aërostaten aus der Umdrehung einer einfach gekrümmten Curve um ihre Achse erzeugt worden: so wird das Gleichgewicht der obigen Kräfte nur dann Statt finden, wenn die Erzeugungscurve ein Kreisbogen ist. Denn es sey ein Element der krummen Oberfläche $= df$; senkrecht auf dies Element sey in der Richtung des Krümmungshalbmessers r des Elementes eine beständige Kraft P angebracht; die Zusammenziehungskraft des Elementartheilchens df sey $= \lambda$; das Integralzeichen für den ganzen Umfang der krummen Oberfläche $= S$, und das Variationszeichen $= \delta$: so wird man für das Gleichgewicht der Kräfte die folgende Gleichung haben:

$$a \ldots \; S\lambda\delta df - SP \,.\, df \,.\, \delta r = 0. \text{*)}$$

Es sey nun die Abscisse der Erzeugungscurve $= x$; die zustimmende Ordinate $= w$; ein Element der Curve $= ds$; und $d\varphi$ ein Element des Kreisbogens φ für den Radius 1: so wird in der Voraussetzung, dass $dv = w\,d\varphi$ sey, bekanntlich die folgende Gleichung Statt finden:

*) Mécanique analytique par M. La Grange. A Paris, 1788. 1ère Partie, IV. Section, no. 15 et seq.

$$df = dv \,.\, ds = dv \sqrt{dx^2 + dw^2}.$$

Hieraus zieht man:

$$\delta df = d\delta f = d\delta v \,.\, ds + dv \,.\, \left[\frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dw}{ds} d\delta w\right].$$

Wird nun der Werth von $\lambda \delta df$ in Bezug auf die veränderlichen Grössen v, x und w dergestalt integrirt, dass man das Integral für den ganzen Umfang der krummen Oberfläche nimmt und die Sätze, welche sich auf den Anfang und das Ende des Integrals beziehen, weglässt, so wird man erhalten:

$$S\lambda \delta df = -SSd\frac{\lambda ds}{dv} dv \delta v - SdvSd\frac{\lambda dx}{ds}\delta x$$
$$- SdvSd\frac{\lambda dw}{ds}\delta w.$$

Der Abstand des Mittelpunkts des Krümmungskreises vom Scheitel der Curve, in der Richtung der Abscisse x, sey $= a$; der senkrechte Abstand aber dieses Mittelpunkts von der Achse der Curve sey $= b$, so wird:

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b+w)^2};$$

mithin

$$\frac{\delta r}{\delta x}\delta x + \frac{\delta r}{\delta w} \,.\, \delta w = -\frac{(a-x)}{r} \,.\, \delta x + \frac{(b+w)}{r} \,.\, \delta w$$
$$= -\frac{dw}{ds} \,.\, \delta x + \frac{dx}{ds} \,.\, \delta w.$$

Es ist demnach:

$$-SPdf\delta r = -SPd\nu ds\left[\frac{\delta r}{dx}\delta x + \frac{\delta r}{\delta w}\delta w\right]$$

$$= + Sd\nu SPdw\,.\,\delta x - Sd\nu SPdx\,.\,\delta w.$$

Substituirt man nun die gefundenen Werthe von $SPdf\,.\,\delta r$, $S\lambda\,.\,\delta df$ in die Gleichung $a\ldots$, so wird

$$0 = -S\delta\nu\, S\frac{d\lambda ds}{d\nu}d\nu + Sd\nu S\left[Pdw - d\lambda\frac{dx}{ds}\right].\,\delta x$$

$$-Sd\nu\, S\left[Pdx + d\frac{\lambda dw}{ds}\right].\,\delta w.$$

Da aber die Coefficienten von $\delta\nu$, δx, δw, wegen der unbestimmten Grösse λ, von einander unabhängig sind, so zerfällt die obige Gleichung in die folgenden drei Gleichungen:

$$b\ldots 0 = d\frac{\lambda ds}{d\nu}d\nu;$$

$$c\ldots 0 = Pdw - d\frac{\lambda dx}{ds};$$

$$d\ldots 0 = +Pdx + d\frac{\lambda dw}{ds}.$$

Aus den Gleichungen $d\ldots$ und $c\ldots$ zieht man:

$$1\ldots\frac{\lambda}{P}\frac{dw}{ds} = c' - x;\quad 2\ldots\frac{\lambda}{P}\frac{dx}{ds} = c + w;$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{c' - x}{c + w};\quad 0 = (c' - x)\,dx - (c + w)\,dw.$$

Integrirt man nun, so wird

$$(c+w)^2 + (c'-x)^2 = c''^2,$$

wo c, c', c'' drei beständige Grössen bedeuten.

Da die Gleichung $(c+w)^2 + (c'-x)^2 = c''^2$ zu einem Kreisbogen gehört, der mit dem Radius c'' über der Sehne $2c'$ beschrieben worden: so ist die krumme Oberfläche ein Sphäroid, welches durch die Umdrehung eines Kreissegments um seine Sehne erzeugt wird. Die vollkommene Kugeloberfläche wird demnach der Aufgabe gleichfalls Genüge leisten, wenn man annimmt, dass $c = 0$ sey.

Wird die Gleichung 1 ... mit dw, die Gleichung 2 ... mit dx multiplicirt, dann aber beide Gleichungen zu einander addirt, so wird: $\lambda ds = P(c'dw + cdx) + P(wdx - xdw)$; $\int \lambda ds = P [\int (c'dw + cdx) + (\int wdx - \int xdw)]$; denn es ist const. $= 0$ für $x = 0$, $w = 0$, $\int wdx = 0$, $\int \lambda ds = 0$. Da aber für den ganzen Umfang eines Schnitts durch die Achse der krummen Oberfläche, oder am Ende des Integrals, wieder $x = 0$, $w = 0$, und das Zeichen $\int$ in S sich verwandelt, so wird: $S\lambda ds = S 2 w dx P$, oder $\lambda A = PE$, wo A den ganzen Umfang des Schnitts, E aber den Flächeninhalt desselben bedeutet.

Ist nun λ die absolute Festigkeit der Hülle des Aërostaten; P die verstärkte Federkraft des eingeschlossenen Gases; H die Barometerhöhe auf dem

Horizont; h die Barometerhöhe auf einer bestimmten Höhe x über dem Horizont, und q das Gewicht eines Cubikfusses Quecksilber: so wird $\lambda A = q\,(H - h)\,E$. Setzt man die Öffnung des Nothventils am Aërostaten $= k$; die Kraft aber, welche die Feder ausübt, um die Klappe des Ventils anzudrücken $= p$, so muss $p < k\,q\,(H - \frac{\lambda A}{E})$ seyn, wenn das Ventil auf der Höhe x von selbst sich öffnen soll, um das Reissen des Aërostaten zu vermeiden.

§. 5.

Das Volumen eines Körpers, der aus der Umdrehung eines Kreissegments um seine Sehne erzeugt ist, sey $= V$; die Oberfläche desselben $= S$; sein Durchmesser $= 2h$; das Verhältniss seiner grössten Breite zu seiner Länge, oder das Verhältniss seines Durchmessers zur Achse, $= n$; die halbe Peripherie des Kreises für den Radius 1, $= \pi$; und Arc. sin. $2n : (n^2 + 1) = \psi$, so ist:

$$a \ldots\; S = 4\pi h^2 . \left[\frac{n(n^2+1)}{2} - \frac{\psi . (n^4 - 1)}{4}\right];$$

$$b \ldots\; V = 4\pi h^3 . \left[\frac{n^3}{3} - \left(\frac{\psi(n^2+1)(n^4-1)}{16} - \frac{n(n^2-1)^2}{8}\right)\right].$$

Denn es drehe sich ein Kreisbogen $2s$ um seine Sehne, und es sey der senkrechte Abstand des Schwerpunktes des Kreisbogens von der Sehne $= f$, so ist die erzeugte Oberfläche $S, = 4\pi f s$.

Es sey ferner der senkrechte Abstand des Schwerpunktes eines Kreissegments $2E$, von der zu demselben gehörigen Sehne, $= k$, so ist das Volumen des erzeugten Körpers, $= V = 4\pi k E$. *)

Setzt man nun den Radius des Kreisbogens $2s$, $= r$, so wird

$r = h(1+n^2):2$; $s = r\psi = \psi h(1+n^2):2$; $E = \frac{1}{2}s.r - \frac{1}{2}nh(r-h) = h^2 . \left[\frac{\psi(n^2+1)^2}{8} - \frac{n(n^2-1)}{4}\right]$.

Da aber

$$f = [r . nh - \tfrac{1}{2}sh(n^2-1)] : s;$$

$$k = [\tfrac{1}{3}n^3h^3 - \tfrac{1}{2}Eh(n^2-1)] : E, \text{ **)}$$

so wird, nach geschehener Substitution dieser Grössen in die Werthe von S, V, die Formel $a\ldots$ sowohl, wie auch die Formel $b\ldots$ entstehen.

§. 6.

Der Aërostat, Fig. 1. Tafel I., bewege sich in der Richtung seiner Achse BA in ruhender Luft,

*) Grundlehre der Statik etc. von Abel Bürja. Berlin u. Liebau, 1789. 8. Hauptstück, §. 7.

**) Ebendas. 8. Hauptst. §. 2. Zusatz; und §. 3.

und es sey F die Stossfläche desselben, so wird man mit Beibehaltung der Bezeichnungen des vorhergehenden Abschnitts die folgende Gleichung erhalten.

$$a \ldots \; F = \pi h^2 . \left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{n^2 . (n^4+1)}{(n^2+1)^2} - (n^2+1)\right)\right]$$

$$= \pi h^2 . \frac{2(2n^2+1)}{3(n^2+1)^2} .$$

Denn nach §. 4. ist $c''^2 = (c+w)^2 + (c'-x)^2$;

mithin $$\frac{dw}{dx} = \frac{c'-x}{c+w},$$

$$\frac{dx^2}{dw^2} + 1 = \frac{c''^2}{(c'-x)^2} = c''^2 : [c''^2 - (c+w)^2].$$

Substituirt man nun diesen Werth in die Gleichung

$$F = 2\pi \int \frac{w\,dw}{\frac{dx^2}{dw^2} + 1} \text{ *)},$$

so wird

$$F = 2\pi \int \frac{w\,dw . [c''^2 - (c+w)^2]}{c''^2}$$

$$= 2\pi \left[\tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{3}hc'' + \tfrac{1}{12}\left(c''^2 - \frac{c^2}{c''^2} . c^2\right)\right]$$

$$= \pi h^2 . \left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{n^2 . (n^4+1)}{(n^2+1)^2} - (n^2+1)\right)\right]$$

$$= \pi h^2 . \frac{2(2n^2+1)}{3(n^2+1)^2} .$$

---

*) Grundlehre der Hydraulik von Abel Bürja. Berlin 1792. 4. Hauptstück, §. 11.

§. 7.

Das Volumen des Aërostaten sey $= V$; die Stossfläche desselben $= F$; die Dichtigkeit der Luft $= D$; und die Geschwindigkeit des Windes $= C$: hieraus und aus der Masse M des Aërostaten soll die Zeit t bestimmt werden, welche verfliessen würde, bis der Aërostat eine gegebene Geschwindigkeit, $= u < C$, in der Richtung des Windes erlangt.

Nach dynamischen Principien ist

$$\frac{du}{dt} = \frac{FD}{2M}[C-u]^2;$$

mithin

$$dt = \frac{2M}{FD} \frac{du}{[C-u]^2}.$$

Integrirt man diese Gleichung in der Voraussetzung, dass für $t = 0$, $u = 0$ sey, so wird:

$$a \ldots \; t = \frac{2u}{C.(C-u)} \cdot \frac{M}{F.D}.$$

Ist der Aërostat auf einer gegebenen Höhe x über dem Horizont mit dem Auftriebe der Luft im Gleichgewicht, so wird auf der Höhe x, $M = V.D$; mithin:

$$b \ldots \; t = \frac{2u}{C.[C-u]} \cdot \frac{V}{F}.$$

Setzt man nun die horizontale geradlinichte Bahn, welche der Aërostat binnen der Zeit t beschreiben

würde, $= y$, so wird $u = \frac{dy}{dt}$; mithin wird nach, geschehener Substituirung des Werths von u und nachheriger Integrirung, die folgende Gleichung Statt finden:

$$c \ldots y = C . \left[t + \alpha . \log. \text{hyp.} \frac{\alpha}{\alpha + t} \right],$$

wo zur Abkürzung $\alpha = 2 V : F . C.$

§. 8.

Berechnet man nach der Formel $b \ldots$ §. 7. die Zeit t für den sphäroidischen Aërostaten, Fig. 1. Tafel I., so wird nach dieser Berechnung der Aërostat nur nach einer bedeutenden Zeit eine Geschwindigkeit erlangen, die nicht bedeutend von der Geschwindigkeit des Windes differirt. Da ferner der Aërostat bei dieser langsameren Bewegung vermittelst des arbeitenden Flügelrades erhalten werden kann, so lässt das Segel zur Direction der Aërostaten sich mit in Anwendung bringen.

Denn es sey, wie vorhin, die Stossfläche des Aërostaten $= F$; die Oberfläche des Segels $= \mathbf{F} = nF$; der Winkel, welchen die Segelfläche mit der Richtung des Windes macht, $= \beta$; der Winkel aber, welchen die anfängliche Richtung der Bewegung des Aërostaten mit der Richtung des Windes bildet, $= \psi$, so ist:

$$a \ldots \text{tang.} \psi = \frac{n . [\cos. \beta - \cos. 3 \beta]}{4 + n (3 . \sin. \beta - \sin. 3 \beta)}.$$

Um diese Formel zu beweisen, sey die relative Geschwindigkeit des Aërostaten in der Richtung des Windes $= W = C - u$; die Beschleunigung der Schwere $= g$: so ist die Kraft des Windes in senkrechter Richtung auf die Segelfläche $= W^2 . \sin.^2 \beta . \mathbf{F} D : 2g$. Diese Kraft zerfälle man nun in die zwei Seitenkräfte $W^2 . \sin.^2 \beta \mathbf{F} D \cos. \beta : 2g$ und $W^2 . \sin.^2 \beta \mathbf{F} D . \sin. \beta : 2g$, von welchen die erstere auf die Richtung des Windes senkrecht, die zweite aber mit der Richtung des Windes parallel ist. Da nun mit dieser letzteren Kraft der Stoss des Windes auf den Aërostaten in der Richtung seiner Achse gleichfalls parallel ist, so hat man nach der Lehre von den zusammengesetzten Kräften:

$$\text{tang. } \psi = W^2 . \sin.^2 \beta . \cos. \beta \mathbf{F} : [W^2 . \sin.^3 \beta \mathbf{F} + W^2 . F] = n . \sin.^2 \beta . \cos. \beta : [\sin.^3 \beta . n + 1] = n . (\cos. \beta - \cos. 3\beta) : [4 + n(3 \sin. \beta - \sin. 3\beta)].$$

Der Winkel ψ dient jedoch nur für den Anfang der Bewegung; denn die Bahn des Aërostaten wird eigentlich eine krumme Linie bilden, die in der Horizontalebene liegt und die Richtung des Windes zur Achse hat. Nimmt man demnach die Abscissen dieser Curve auf der Richtungslinie des Windes und nennt solche $= x$, die senkrechte Ordinate auf diese Richtlinie $= y$, und setzt ferner die Stossfläche der Seite des Aërostaten $= R$, sein Volumen $= V$, zur

Abkürzung aber $a = 2V : R$; $b = \frac{W.\sin.\beta}{V} \sqrt{\frac{1}{2}RF}$, so wird man die folgende Gleichung für die Curve haben, welche der Aërostat beschreibt:

$$b \ldots y = a . \text{log. hyp.} \left[\frac{e^{2bx:C}+1}{2\, e^{bx:C}}\right].$$

§. 9.

Vor dem Aufsteigen eines zum Theil gefüllten Aërostaten vermindere man den Ballast, womit die Gondel desselben beschwert ist, und setze die Höhe, wo der Aërostat mit dem Auftriebe der Luft im Gleichgewicht ist, $= x$, so wird diese Höhe durch die folgende Gleichung gegeben seyn:

$$a \ldots x = S . \text{log. hyp.} \frac{n\,i\,M}{k\,M + B}.$$

Denn es sey das Volumen des ganz gefüllten Aërostaten $= V$; die Dichtigkeit der Luft auf dem Horizont $= L$: so ist die Masse der dort verdrängten Luft $= V . L$. Der Aërostat sey jedoch nicht gänzlich, sondern nur zum Theil mit Wasserstoffgas gefüllt; die Dichtigkeit des Wasserstoffgases auf dem Horizont sey $= l$; die Dichtigkeit der Luft auf der Höhe x über dem Horizont $= L'$; die Masse der verdrängten Luft auf der Höhe x, $= \mathfrak{M}$; und M sey die Masse des Wasserstoffgases, welche der ganz gefüllte Aërostat auf dem Horizont fassen würde: so

ist $\mathfrak{M} = VL' = \frac{M}{l} L'$. Setzt man nun die Barometerhöhen und die specifischen Federkräfte der Luft auf dem Horizont und auf der Höhe x, $H, h; E, E'$, so ist bekanntlich $E . L : E' . L' = H : h$; mithin $L' = L \frac{hE}{HE'}$; $\mathfrak{M} = \frac{M}{l} L' = M . \frac{LEh}{lE'H} = ni \frac{h}{H} M$, wenn zur Abkürzung $n = L : l$, und $i = E : E'$.

Auf dem Horizont sey die Masse und das Volumen des zum Theil gefüllten Aërostaten M', V', so ist $M : M' = Vl : V'l = V : V'$; setzt man demnach zur Abkürzung $k = V' : V$, so wird $M' = kM$.

Soll nun auf der Höhe x, wo die Barometerhöhe h Statt findet, das Gewicht der Masse kM mit dem Auftriebe der Luft im Gleichgewicht seyn, so wird man, in der Voraussetzung, dass B das Gewicht der Hülle mit Einschluss der angehängten Last bedeutet, die folgende Gleichung haben:

$$1 \ldots \; 0 = \left(ni \frac{h}{H} - k\right) . M - B.$$

Setzt man nun die Subtangente des atmosphärischen Logarithmensystems zur Zeit des Versuchs $= S$, so wird $x = S . \log. \text{hyp.}\, H : h = S . \log. \text{hyp.}\, niM : kM + B$.

Soll aber der Aërostat in dem Zwischenraum vom Horizont bis zur Höhe x an jeder Stelle mit dem Auftriebe im Gleichgewicht seyn, so ist auf dem

Horizont die Masse des Aërostaten $= kM + B$; die Masse der aus der Stelle verdrängten Luft aber ist $= nkM$; mithin ist auf dem Horizont

$$2 \ldots\ 0 = nkM - kM - B.$$

Da nun die Gleichungen 1... und 2... beide Statt finden sollen, so subtrahire man die Gleichung 1... von der Gleichung 2..., wodurch man erhält:

$$0 = i\frac{h}{H} - k;\ \frac{H}{h} = \frac{i}{k} = i\frac{V}{V'}.$$

Es wird demnach in dem Falle, wenn $i = l$, die folgende Gleichung Statt finden:

$$b \ldots\ x = S\,.\,\text{log. hyp.}\,\frac{V}{V'}.$$

§. 10.

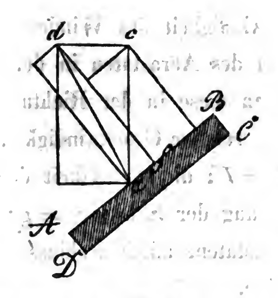
Um die Wirkung des Flügelrades zu berechnen, sey die Oberfläche sämmtlicher Flügel desselben $= \mathfrak{F}$; der senkrechte Abstand der Stosspunkte der Flügel von der Achse des Rades $= r$; und der Winkel, welchen die Flügel mit der Achse machen, $= \varphi$. Es sey ferner der Halbmesser des Wellrades B, Fig. 2. Tafel II., $= r'$; der Halbmesser des in der Gondel befindlichen Wellrades g, $= R$; der Radius der Kurbel an diesem Wellrade $= a$; und P sey eine Kraft, welche auf den Radius der Kurbel senkrecht angebracht ist.

Die Geschwindigkeit des Windes sey $= C$, die Geschwindigkeit des Aërostaten in der Richtung seiner Achse, wenn diese in der Richtung des Windes liegt, $= u$; die relative Geschwindigkeit des Aërostaten $= C - u = V$; die Dichtigkeit der Luft $= D$; die Beschleunigung der Schwere $= g$; und M die Masse des Aërostaten, mit Einschluss der daran hängenden Gewichte.

Binnen der Zeit t beschreibe der Radius des Flügelrades gleichzeitig mit dem Wellrade B einen Winkel ψ, indess die Kurbel a und das Wellrad g einen Winkel ψ' beschreiben; so wird die folgende Bedingungsgleichung Statt finden:

$$a \ldots R . \delta \psi' = r' . \delta \psi .$$

Es sey nun in der folgenden Figur, $ABCD$ ein senkrechter Schnitt auf den Radius der dreieckigen Flügel des Rades; die Geschwindigkeit u des Flügelrades in der Richtung des Windes $= ab$; die Tangentialgeschwindigkeit aber der in Drehungsbewegung begriffenen Stosspunkte des Rades sey $= ac$ $= r\varrho$, so wird der Stosspunkt a eine zusammengesetzte Bewegung in der Richtung und mit der Geschwindigkeit ad haben.



Setzt man nun den Winkel $Aab = \varphi$, so wird die Oberfläche, wovon DC ein Schnitt ist, dem Stosse des Windes mit der relativen Geschwindigkeit df, $= r\varrho \,.\, \cos.\, \varphi + u \,.\, \sin.\, \varphi > C \,.\, \sin.\, \varphi$ ausweichen; die Vorderfläche AB aber wird von der Luft einen Gegenstoss mit der relativen Geschwindigkeit $r\varrho \,.\, \cos.\, \varphi + u \,.\, \sin.\, \varphi - C \,.\, \sin.\, \varphi = r\varrho \,.\, \cos.\, \varphi + (C-u) \,.\, \sin.\, \varphi$ erhalten. Nach dieser vorläufigen Bemerkung ergeben sich die folgenden zwei Gleichungen:

$$b \ldots \quad 0 = A\frac{d\varrho}{dt} + g \,.\, \Big[\frac{(r\varrho \,.\, \cos.\, \varphi - V \,.\, \sin.\, \varphi)^2}{2g} \,.\, \mathfrak{F} \,.\, D \,.\, r \,.\, \cos.\, \varphi - Pa\frac{r'}{R}\Big];$$

$$c \ldots \quad 0 = M\frac{du}{dt} + g \,.\, \Big[\frac{(r\varrho \,.\, \cos.\, \varphi - V \,.\, \sin.\, \varphi)^2}{2g} \,.\, \mathfrak{F} \,.\, D \,.\, \sin.\, \varphi - \frac{V^2}{2g} \,.\, [F + \mathbf{F} \,.\, \sin.\, {}^3\beta]\Big] \,.\, D,$$

wo ausser den vorhergehenden Bezeichnungen: $\varrho = \frac{d\psi}{dt}$,

F die Oberfläche des Segels, und β den Winkel bedeutet, welchen die Fläche des Segels mit der Richtung des Windes macht. Die Grösse A bezeichnet das Drehungsmoment des Flügelrades und der Wellräder.

Das arbeitende Flügelrad sey im Beharrungsstande, so ist alsdann $\frac{d\varrho}{dt}=0$, $\frac{du}{dt}=0$; und wenn zur Verkürzung $\varrho=2\pi k$, $r\varrho \cdot \cos.\varphi = nV.\sin.\varphi$, $m = 2ak.P$, $B = F + \mathbf{F}.\sin.^3\beta$, so wird man aus den Gleichungen $b\ldots$, $c\ldots$ die folgenden zwei einfacheren Gleichungen ziehen, wenn zuvörderst die Gleichung $b\ldots$ mit ϱ multiplicirt worden:

$$1\ldots\ 0=(n^2-1)^2.n\mathfrak{F}DV^3.\sin.^3\varphi - 2g\frac{m\pi r'}{R};$$

$$2\ldots\ 0=(n-1)^2.\mathfrak{F}\sin.^3\varphi - B.$$

Aus der Gleichung 2 ... folgt:

$$(n^2-1)^2 = B:\sin.^3\varphi.\mathfrak{F};\quad n = 1+\sqrt{\frac{B}{\sin.^3\varphi.\mathfrak{F}}}.$$

Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichung 1 ..., so wird der Werth von $C \mp u = V$ durch die folgende Gleichung sich darstellen lassen:

$$d\ldots\ V = \sqrt[3]{\frac{2gm\pi r'}{BRD.\left(1+\sqrt{\frac{B}{\sin.^3\varphi.\mathfrak{F}}}\right)}}.$$

Werden hierauf die Werthe von V, n in die

Gleichung $n V . \sin.\varphi = r\varrho . \cos.\varphi = 2 r\pi k . \cos.\varphi$ substituirt, so wird nach geschehener Reduction

$$e \ldots k = \frac{\text{tang.}\varphi}{2r\pi} . \sqrt[3]{\frac{2gm\pi r'\left(1+\sqrt{\frac{B}{\sin.^3\varphi . \mathfrak{F}}}\right)^2}{B . R . D}} .$$

Soll vom Segel kein Gebrauch gemacht werden, sondern die horizontale Bewegung des Aërostaten bloss durch das Flügelrad bewirkt werden, so wird alsdann $\mathbf{F} = 0$ oder $\sin.\beta = 0$. Bei diesen Annahmen erhält man aus den Gleichungen $d \ldots$, $e \ldots$ die folgenden zwei einfacheren Gleichungen:

$$f \ldots u = \sqrt[3]{\frac{2gm\pi r'}{FRD . \left(1+\sqrt{\frac{F}{\sin.^3\varphi\, \mathfrak{F}}}\right)}} ;$$

$$g \ldots k = \frac{\text{tang.}\,\varphi}{2r\pi} \sqrt[3]{\frac{2gm\pi r' . \left(1+\sqrt{\frac{F}{\sin.^3\varphi \mathfrak{F}}}\right)^2}{FRD}} .$$

Diese zwei Formeln dienen in den Fällen: wenn entweder vollkommene Windstille herrscht, oder wenn der Aërostat die Geschwindigkeit des Windes bereits erlangt hat.

§. 11.

Die Formeln der vorhergehenden Abschnitte wollen wir nun auf die Abmessung und horizontale Be-

wegung eines Aërostaten von der Form Fig. 1. Tafel I. anwenden, dann aber auch die horizontale Bewegung kugelförmiger Aërostaten in Betracht ziehen.

Es verhalte sich nach Fig. 1. Tafel I. der Durchmesser CD des Aërostaten zu seiner Achse AB wie 1 zu 10; und es sey $CD = 16$ Fuss, so ist nach den Formeln $a\ldots$, $b\ldots$, §. 5.

$$S = 4\pi h^2 . (6,7069) = 5394,0152 \,\square\text{Fuss},$$
$$V = 4\pi h^3 . (2,5808) = 16604,8589 \text{ Cubikfuss},$$

wenn $\pi = 22 : 7$, $n = 10$, und $h = 8$ Fuss.

Für einen zum Theil gefüllten Aërostaten sey $V = 16000$ Cubikfuss; die Oberfläche S aber sey $= 5395$ □Fuss; und es wiege 1 □Fuss gefirnisster Taffet $\frac{3}{2}$ Loth; ein Cubikfuss atmosphärische Luft 2,65 Loth; das Wasserstoffgas aber sey fünfmal leichter als atmosphärische Luft: so wird der Aërostat nahe an der Erde eine Hebkraft von 802,422 Pfunden ausüben, eine Hebkraft, welche hinreichend ist, um drei Aëronauten nebst Gondel und Zubehör in der unteren Luftschicht zu tragen.

Nach der Formel $b\ldots$ §. 9. wird der zum Theil gefüllte Aërostat mit einer Last von 802,422 Pfunden auf eine Höhe von 943 pariser Fuss durch mechanische Vorrichtungen gehoben werden können, wenn man bei Berechnung jener Höhe annimmt, dass S 4239 Toisen betrage.

Verstattet der Aufsteigeplatz und der Zustand der Atmosphäre ein langsames Aufsteigen, so kann der Aërostat entweder durch das horizontale Flügelrad oder mittelst des Segels zu jener Höhe nach und nach emporgehoben werden. Wenn man den Anker am Seil auswirft und das Seil so lange folgen lässt, bis der Aërostat die verlangte Höhe erreicht hat, so wird man gleichfalls ohne Verlust von Gas steigen. Bei ungünstigen Umständen zum Aufsteigen könnte man durch Auswerfen von Ballast zuerst schnell eine mässige Höhe zu erreichen suchen, dann aber den Aërostaten durch die obigen Mittel dirigiren. Um wieder auf die Erde herabzugelangen, dürfte man nur eine kurze Zeit das Ventil öffnen und etwas Gas entweichen lassen. Die folgende Formel, wo V das Volumen des Aërostaten, oder vielmehr das Volumen des Wasserstoffgases, womit der Aërostat vor dem Herabsteigen gefüllt war; und H, h die Barometerhöhen auf dem Horizont und auf der Höhe x bedeuten, giebt den Wasserstoffgas-Verlust beim Herabsinken des Aërostaten.

$$a \ldots \quad \triangle V = V . \left(1 - \frac{h}{H}\right).$$

Es sey z. B. $x = 300$ Fuss, $1 - \frac{h}{H} = 0{,}01$; $V = 11400$, so wird $\triangle V = 114$ Cubikfuss.

Ein mässiger Kraftaufwand ist hinreichend, um dem Aërostaten, Fig. 1. Tafel I., eine bedeutende Geschwindigkeit in horizontaler Richtung zu ertheilen. Denn nach der Formel $a \ldots$ §. 6. ist die Stossfläche dieses Aërostaten = 2,656 Fuss, der Gondel = 1,678 □ Fuss; mithin beträgt die Stossflächensumme nur 4,334 □ Fuss.

Wegen der am Aërostaten befindlichen Seile und sonstigen Körper wollen wir jedoch die Summe der Stossflächen bedeutend grösser annehmen und solche = 12 □ Fuss setzen, so wird der Aërostat, Fig. 1. Tafel I., auch bei dieser Annahme noch bedeutende Vortheile für die horizontale Bewegung desselben gewähren.

Denn bei der Direction der Aërostaten vermittelst des Segels würde es darauf ankommen, dass der Aërostat nur nach Verlauf eines bedeutenden Zeitraumes die Geschwindigkeit des Windes erlange; dies wird aber bei der Form des Aërostaten Fig. 1. Tafel I. der Fall seyn. Denn es sey die Stossfläche des Aërostaten = 12 □ Fuss, die Geschwindigkeit des Windes = 15 = C, die Geschwindigkeit des Aërostaten in der Richtung des Windes am Ende der Zeit $t = u = \frac{9}{10} C$, das Volumen des Aërostaten nur = 16000 Cubikfuss (das jedoch bei vollkommener Entfaltung der Hülle weit mehr beträgt): so ist dennoch

vermöge der Formel $b \ldots$ §. 7., t = 26 Minuten 40 Secunden. Setzt man aber $C = 30$ Fuss, $u = 0{,}9 \,.\, C$, so wird t = 13 Minuten 20 Secunden.

Da nun der Aërostat bei dieser langsameren Bewegung erhalten werden kann, wenn das Flügelrad G Fig. 1. Tafel I. von Zeit zu Zeit mit der gehörigen Winkelgeschwindigkeit in Umlauf erhalten wird: so ergiebt sich hieraus die Anwendbarkeit des Segels selbst bei einem heftigen Winde von 30 Fuss Geschwindigkeit.

Da aber die Segelfläche zu diesem Behuf eine bedeutende Oberfläche haben muss, so sey $\mathbf{F} = 30\, F$; der Winkel β aber, welchen die Segelfläche mit der Richtung des Windes macht, sey = 20°, so wird nach der Formel $a \ldots$, §. 8., tang. $\psi = 1{,}4987722$; mithin wird die anfängliche Richtung der Bewegung des Aërostaten mit der Richtung des Windes einen Winkel von 56° 17′ 17″ machen.

Um in der Ausübung eine leichtere Übersicht zu haben, berechne man nach der Formel $a \ldots$ §. 8. für gegebene Werthe des Winkels β nach und nach die zustimmenden Werthe des Winkels ψ, und bringe die zusammengehörigen Werthe von β, ψ in eine Tafel, so kann in vorkommenden Fällen für einen gegebenen Winkel β der zustimmende Winkel ψ gefunden werden.

Bedient man sich statt des Segels bloss des Flügelrades, um den Aërostaten durch zusammengesetzte Bewegung zu dirigiren, so wird die Richtung der Bewegung des Aërostaten von der Richtung des Windes weit beträchtlicher abweichen, als dies durch das Segel sich bewerkstelligen liesse. Zur Berechnung der zusammengesetzten Bewegung muss aber zuvörderst die Geschwindigkeit bestimmt werden, welche der Aërostat durch das arbeitende Flügelrad in der Richtung seiner Achse BA annehmen würde.

Nach der Formel $f\ldots$ §. 10. beträgt diese Geschwindigkeit 20 rheinl. Fuss, wenn $2g = 60{,}339$ pariser Fuss, $m = 40$ Pfunde, $\mathfrak{F} = 40$ □Fuss, $F = 12$ □Fuss, $\varphi = 45°$, $D = 0{,}08$ Pfunde, $\pi = 22 : 7$, und $r' : R = 2$.

Da aber eine geographische Meile 23664 rheinl. Fuss beträgt, so wird ein Aërostat von der Form und Abmessung Fig. 1. Tafel I. vermittelst des Flügelrades in einer Stunde drei geographische Meilen bei Windstille zurücklegen.

Hat der Aërostat, Fig. 1. Tafel I., die Geschwindigkeit des Windes erlangt, macht seine Achse BA mit der Richtung des Windes einen gegebenen Winkel, und treibt zugleich das arbeitende Flügelrad den Aërostaten in der Richtung der Achse BA: so wird der Aërostat in einer horizontalen geraden Linie

mit zusammengesetzter Bewegung seinen Lauf fortsetzen.

Es sey demnach die Geschwindigkeit des Aërostaten in der Richtung seiner Achse $= c = 20$ Fuss, die Geschwindigkeit des Windes $= C = 15$ Fuss, und der Winkel, welchen die Achse des Aërostaten mit der Richtung des Windes macht, $= \psi = 138°\ 34'\ 35''$: so wird der Abweichungswinkel φ der Richtung der Bewegung des Aërostaten von der Richtung des Windes $= 90°$ betragen. Denn man setze $\varphi = 90°$, so wird nach der Formel $a \ldots$ §. 3. $\cos.\ \psi = \frac{C}{c} = \frac{15}{20} = 0{,}7500000$; mithin ist $\psi = 138°\ 34'\ 35''$.

Setzt man aber $c > C$, $c \,.\, \cos.\ \psi > C$, so wird φ nach der Formel $a \ldots$ §. 3. ein stumpfer Winkel seyn. Es sey demnach $C = 15$, $c = 20$, $\psi = 154°\ 8'\ 45'',8$, so wird $\varphi = 109°\ 1'$.

Ferner wird der Winkel φ ein Maximum, wenn $\cos.\ \psi$ negativ, und $c < C$; in welchem Falle $\cos.\ \psi = \frac{c}{C}$, und $\text{tang.}\ \varphi = \frac{c}{\sqrt{C^2 - c^2}}$ für das Maximum gilt.

Die mittlere Geschwindigkeit bI, Fig. 3. Tafel III., sey $= w$, so kann diese Geschwindigkeit nach der folgenden Formel berechnet werden:

$$b \ldots \sqrt{C^2 + c^2 \mp 2cC \cdot \cos. \psi},$$

wo das negative Zeichen für einen stumpfen, das positive Zeichen aber für einen spitzigen Winkel ψ gilt.

Die Direction eines Aërostaten von der Form und Abmessung Fig. 1. Tafel I. durch zusammengesetzte Bewegung hat demnach bedeutende Vortheile vor der Direction durch Beihülfe des Segels; bei der Direction mittelst des Segels findet jedoch der vortheilhafte Umstand Statt, dass das Flügelrad nur von Zeit zu Zeit in Umlauf gesetzt werden darf.

Kugelförmige Aërostaten können zwar durch Segel nicht dirigirt werden, wohl aber durch zusammengesetzte Bewegung; obgleich mit geringerem Erfolg, als dies bei dem Aërostaten Fig. 1. Tafel I. der Fall seyn würde. Denn ein kugelförmiger Aërostat von 28 Fuss Durchmesser werde dem Winde frei überlassen, so wird bei einem Winde von 15 Fuss Geschwindigkeit der Aërostat bereits in 45 Secunden neun Zehntheile von der Geschwindigkeit des Windes erlangt haben; mithin würde die Wirkung des Windes auf das Segel nur noch dem zehnten Theile der Geschwindigkeit des Windes entsprechen, bald nachher aber gänzlich aufhören. Ist aber zwischen dem kugelförmigen Aërostaten und seiner Gondel ein Flügelrad angebracht, dessen Flügel eine Fläche von 120 □ Fuss haben; und dreht ein Mensch

dies Flügelrad von der Gondel aus mit der gehörigen Winkelgeschwindigkeit: so wird nach der Formel f... §. 10. der Aërostat in einer Zeitsecunde 5,504 pariser, mithin 5,69 rheinl. Fuss zurücklegen.

Hieraus folgt: dass ein kugelförmiger Aërostat von 28 Fuss Durchmesser in einer Stunde 20484 rheinl. Fuss bei vollkommener Windstille, vermittelst des arbeitenden Flügelrades, zurücklegen würde; mithin kann der Aërostat im Winde durch zusammengesetzte Bewegung vermittelst des Flügelrades dirigirt werden. Denn es sey, mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnungen: $C = 15$ Fuss, $c = 5$ Fuss, $\psi = 160° \; 31' \; 43'',5$, so ist der Abweichungswinkel $\varphi = 19° \; 28' \; 1'',8$; setzt man aber $C = 30$ Fuss, $c = 5$ Fuss, $\psi = 170° \; 24' \; 21''$, so wird φ nur $= 9° \; 35' \; 30'',5$ betragen.

In dem Falle, wenn $\cos. \psi = \frac{c}{C} = \frac{5}{15} = \cos. 160° \; 31' \; 43'',5$, wird demnach der Aërostat nach der Formel b... binnen einer Stunde 4,4 geographische Meilen mit zusammengesetzter Bewegung, unter einem Abweichungswinkel von $19° \; 28' \; 1'',8$, zurücklegen.

Hat der kugelförmige Aërostat die Geschwindigkeit des Windes erlangt, und wird das Flügelrad von Zeit zu Zeit in Umlauf gesetzt, so wird der Aërostat mit der erhaltenen anfänglichen Geschwin-

digkeit seitwärts von der Richtung des Windes in krummen Linien sich bewegen, wenn die Richtung der Geschwindigkeit, welche das arbeitende Flügelrad bewirkt, mit der Richtung des Windes einen gegebenen Winkel macht.

Fig. 1. Tafel IV. stellt eine Vorrichtung zur Bewirkung einer willkürlichen Bewegung kugelförmiger Aërostaten vor. Es sey zu diesem Behuf *GHDIG* ein hölzerner Ring, der mittelst der Seile *tu*, *t'u'*, *Dx*... am Äquator des Aërostaten; durch die Seile *Gv'*, *t''v''*, *Dy* aber an der Gondel in horizontaler Lage befestigt ist. Ein zweiter vertical stehender Ring *GEDFG* trage das Flügelrad, hänge im Kloben bei *F* und lasse in Einschnitten bei *G*, *D* im horizontalen Ringe sich um seinen Mittelpunkt drehen. Der Kloben *F* ist mit zwei Rollen versehen und kann durch hinreichend starke Seile am unteren Theile des Aërostaten befestigt werden; zur Sicherheit kann der verticale Ring noch durch zwei Kloben bei *F'*, *F''*, und durch einen kleineren horizontalen Ring bei *K*, *L* unterstützt werden. An der Welle des Flügelrades sey eine Walze *C* befestigt; eine zweite kleinere Walze *D'* laufe in Stützen, die an dem verticalen Ringe befestigt sind. Sind nun beide Walzen ihrer Länge nach mit Einschnitten versehen und durch ein Doppelseil *kl* ohne Ende

mit einander verbunden, so wird man das Flügelrad durch die Kurbeln *m*, *n* in Umlauf setzen, dadurch aber dem Aërostaten eine horizontale Bewegung ertheilen können.

Soll der zum Theil gefüllte kugelförmige Aërostat in der Verticallinie auf- oder abwärts bewegt werden, so drehe man den Ring *DEGFD* so lange, bis die Achse des Flügelrades eine verticale Lage erhalte, und setze dann das Flügelrad vermittelst der Kurbel *p'* in der erforderlichen Richtung in Umlauf. Zu diesem Behuf ist die Kurbel an der Achse eines Getriebes *g*, Fig. 2., befestigt, dies aber greift in ein Kronrad *op* ein, welches am Cylinder *C*, Fig. 1., befestigt ist. An dem verticalen Ringe, wovon *v*, *w*, Fig. 2., zwei Schnitte bedeuten, ist der Rahmen *rstu* senkrecht auf den Ring, bei *c*, *d* aber der Träger *cd* befestigt, um die Zapfen des Getriebes *g* und des Kronrades *op* aufzunehmen; ferner ist *ab* ein Theil vom zweiten Träger *a'b'*, durch welchen die Welle des Flügelrades, Fig. 1., hindurchgeht.

Den kleineren horizontalen Ring bei *K*, *L*, Fig. 1., befestige man durch Seile am grösseren Ringe *GD* und an der Gondel; versehe auch diesen Ring bei *K*, *L* mit Rollen, damit der verticale darauf um so leichter sich bewegen lasse.

Die Höhe *ef* der 12 dreieckigen Flügel, Fig. 1., beträgt $6\frac{2}{3}$ Fuss, ihre Grundlinie *gh* aber 3 Fuss; mithin wird ein jeder Flügel 10 □Fuss, sämmtliche zwölf Flügel aber werden 120 □Fuss betragen.

Das kleinere Flügelrad *M*, Fig. 1., enthält vier sich gegenseitig durchkreuzende, an einer gemeinschaftlichen Welle befestigte dreieckige Flügel, läuft im Träger *Ga*, der an dem horizontalen Ringe *GHDG* befestigt ist, und kann von der Gondel aus durch das Doppelseil ohne Ende *e*, *d* in Umlauf gesetzt werden. Dies Flügelrad dient dazu, um den Aërostaten um seine Verticale zu drehen, indem man das Flügelrad mit der gehörigen Winkelgeschwindigkeit einige Male umlaufen lässt.

Der folgende einfache Versuch begründet den theoretischen Satz: dass durch Flügelräder eine horizontale Bewegung im luftvollen Raume bewirkt werden könne. Es stellt nämlich Fig. 5. Tafel III. ein Flügelrad von acht Flügeln vor, die mit ihren Spitzen dergestalt an eine gemeinschaftliche Welle *dl* befestigt sind, dass die Flächen der Flügel sich gegenseitig durchkreuzen. Die Höhe *fg* der gleichschenklig dreieckigen Flügel beträgt 1,5, die Grundlinie *hi* aber $\frac{2}{3}$ Fuss; mithin die Oberfläche eines jeden Flügels $\frac{1}{2}$ □ Fuss. Die Welle des Flügelrades lässt sich in dem Träger *lacd* drehen und hat

bei k, e zwei feste Rollen, um welche dünne Bindfäden km, eo gewickelt sind, die mit ihrem einen Ende an den Rollen, mit dem andern Ende aber an dem Stabe mo, woran ein Gewicht n hängt, befestigt sind. Diese Vorrichtung wird bei A, Fig. 4., an einer horizontal hängenden Stange AD dergestalt angebracht, dass ac, Fig. 5., mit der Stange einen rechten Winkel macht. Die Stange hängt an einer Schnur BC von der Decke des Zimmers herab; das Ganze wird übrigens durch ein Gegengewicht bei E im Gleichgewicht, und die Stange in horizontaler Lage erhalten. Der Durchmesser der Rollen k, e, Fig. 5., ist = 2,5 Zoll, das Gewicht n = 24 Loth, und die Fläche der Flügel macht mit der Achse des Rades einen Winkel von 45 Grad.

Dies Flügelrad ward nun so lange um seine Achse gedreht, bis die Fäden km, eo, Fig. 5., auf die Rollen k, e aufgewickelt waren, worauf das Ganze freigelassen wurde. Vermöge des Gewichtes n drehte das Flügelrad sich nun um seine Achse, zugleich aber auch mit der Stange AD, Fig. 4., um den Punkt B so lange, bis die Fäden von den Rollen wieder abgewickelt waren, und das Gewicht n seinen niedrigsten Stand über dem Fussboden des Zimmers erreicht hatte. Während der Drehungsbewegung des Flügelrades um seine Achse beschrieben die End-

punkte der Stange AD, welche 6 rheinl. Fuss lang ist, in 11 Secunden einen Umkreis um den Mittelpunkt B; mithin beschrieb das an der Stange befestigte Flügelrad in 11 Secunden 18,8571 Fuss.

Ausser dem Widerstande der Luft auf die Stange, den Träger und die Gewichte verspätete bei diesem Versuch das Zusammendrehen der Schnur BC, Fig. 4., die Bewegung um den Punkt B; daher würde der Versuch im Kleinen besser ausfallen, wenn man ein ähnliches Flügelrad an einen Aërostaten anbrächte, der eine Form hätte, wie sie in §. 5. angegeben worden. Zu einem Versuch im Kleinen würde ich einen Aërostaten von der Form §. 5., dessen Durchmesser zu seiner Achse sich wie 1 zu 5 verhielte, in Vorschlag bringen. Denn man setze in die Formeln §. 5. $n = 5$, so wird $S = 4\pi h^2 . (3,4126)$; $V = 4\pi h^3 . (1,3487)$. Beträgt demnach der Durchmesser des Aërostaten 3 Fuss, und der Quadratfuss seiner Hülle $\frac{3}{4}$ Loth, so würde dieser Aërostat eine Hebkraft von 1 Pfund 9 Loth ausüben, wenn man ihn zuvörderst mit gereinigtem Wasserstoffgase füllte. Diese Hebkraft würde hinreichend seyn, um ein kleines Flügelrad nebst Zuggewicht zu tragen.

§. 12.

Zwischen dem unteren Pol eines kugelförmigen Aërostaten und seiner Gondel sey im Schwerpunkt

des Ganzen die Vorrichtung Fig. 3. Tafel IV. durch Seile *hi*, *hk*... befestigt, indem man dergleichen Seile an der Vorrichtung, am Äquator des Aërostaten und an der Gondel, in der Art wie im vorigen Abschnitte, nach Fig. 1. Tafel IV., anbringen könnte. *AC* sey der Durchmesser eines horizontalen hölzernen Ringes *ADCBA*, woran an zwei entgegengesetzten Punkten, *A*, *C*, zwei kegelförmige metallene Gefässe, *bfa*, *kim*, befestigt sind. Diese Gefässe gehen in Röhren, *fh*, *ih'*, aus, sind mit geraden Böden, *ba*, *km*, verschlossen und mit Ventilen bei *c*, *l* versehen. Die Ventile öffnen sich von Innen nach Aussen, wenn die Schnüre *cde*, *lno* in der Gondel angezogen werden. Eine Compressionspumpe, *E*, sey durch eine metallene Röhre, *fi*, mit beiden Gefässen verbunden; um die Kolben der Pumpe in Bewegung zu setzen, dienen zwei gezähnte Stangen, *FG*, *HI*, welche in ein Sternrad, das in der Kapsel *F'* befindlich und mit der Kurbel *pq* in Verbindung ist, eingreifen. Sollen nun die Gefässe *bfa*, *kim* mit comprimirter Luft gefüllt werden, so dürfte man zu diesem Behuf nur die Kurbel *pq* gehörig drehen, um dadurch das Spiel der Kolben zu unterhalten.

Die vierte Figur stellt das eine von den kegelförmigen Gefässen im Durchschnitt und im vergrösserten Maassstabe vor. Es ist nämlich *ab* ein Theil

von der Verbindungsröhre; *ACB* das kegelförmige Gefäss selbst, und *d*, *c* sind zwei Ventile, die von hinreichend starken Federn angedrückt werden; *dfgh* ist ferner ein Theil von der Schnur, die dazu dient, um das Ventil von der Gondel aus zu öffnen, zu welchem Behuf das eine Ende dieser Schnur an dem Ventil *d* befestigt ist und dann über Rollen bei *f*, *g* geführt ist.

Gesetzt nun, es werde mittelst der Pumpe *E*, Fig. 3., atmosphärische Luft in den Gefässen *k*, *b* in einem hinreichenden Grade comprimirt, dann aber das Ventil des einen Gefässes, *k*, durch die Schnur *lno* geöffnet: so wird vermöge des Rückstosses der plötzlich frei werdenden comprimirten Luft die Vorrichtung Fig. 3., und mit ihr der Aërostat, eine Bewegung in der Richtung *h'h* überkommen.

Um die anfängliche Geschwindigkeit zu bestimmen, welche der Aërostat durch den Rückstoss der comprimirten Luft bei geöffnetem Ventil des Recipienten *k* annehmen würde, sey das Volumen dieses Recipienten $= A$; die Öffnung desselben bei gehobenem Ventil $= h$; die Masse der comprimirten Luft $= M$; die Dichtigkeit der comprimirten Luft $= \Delta'$; die Dichtigkeit der äusseren atmosphärischen Luft $= \Delta''$; die specifische Federkraft der inneren und der äusseren Luft E, F; die Subtangente der At-

mosphäre zur Zeit des Versuchs $= S'$, und zur Abkürzung $1 - \frac{F\triangle''}{E\triangle'} = n$. Ferner sey die Subtangente der eingeschlossenen Luft $= S = mS'$; das Doppelte des Raumes, welchen ein frei fallender Körper in der ersten Secunde seiner Bewegung zurücklegen würde, $= g$; und am Ende der Zeit t sey bei geöffnetem Ventil eine Luftmasse x aus dem Recipienten entwichen; so wird man die folgende Gleichung haben:

$$\frac{t \cdot h\sqrt{2gS}}{A} = \text{log. hyp.} \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}$$

$$- \text{log. hyp.} \frac{\sqrt{(M-x)} + \sqrt{(nM-x)}}{\sqrt{(M-x)} - \sqrt{(nM-x)}}. \text{*)}$$

Um dieser Gleichung eine einfachere Form zu geben, sey

$$B = \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}, \quad C = \frac{h\sqrt{2gS}}{A}, \quad Y = \sqrt{\frac{nM-x}{M-x}};$$

alsdann wird man die nachstehende Gleichung erhalten:

$$a \ldots \; t \cdot C = \text{log.}\, B - \text{log.} \frac{1+Y}{1-Y},$$

wobei zu bemerken, dass die Zeit t in Secunden ausgedrückt ist.

*) Geschichte der Aërostatik von D. C. Kramp. Strassb. 1786 Anhang, Seite 126.

Es sey nun die Geschwindigkeit, welche der Aërostat durch die Rückwirkung der freigewordenen Luft des Recipienten in der Richtung $h'h$, Fig. 3. Tafel IV., am Ende der Zeit t erlangen würde, $= v$; die Masse des Aërostaten $= Q$, und die Kraft des Rückstosses $= P$, so ist bekanntlich:

$$b \ldots \quad dv = g \frac{P}{Q} dt.$$

Wenn nun ferner S'' die Subtangente, und $\triangle$ die Dichtigkeit der aus dem Recipienten am Ende der Zeit t ausströmenden Luft bedeutet, so wird:

$$P = hS''\triangle\,; \quad S'' = \frac{(nM-x)\,.\,S}{M-x}; \quad \triangle = \frac{M-x}{A}.$$

Es ist demzufolge:

$$P = \frac{(nM-x)}{A} hS = Y^2\,.\,(1-n)\,MhS : (1-Y^2)\,A.$$

Zieht man nun aus der Gleichung $a \ldots$ den Werth von

$$dt = -\,2dY : (1-Y^2)\,.\,C,$$

so wird nach geschehener Substitution der Werthe von dt und von P in die Gleichung b...

$$dv = gPdt : Q = -\,Y^2 dYN : (1-Y^2)^2,$$

wenn zur Abkürzung $N = (1-n)\,M\,.\,\sqrt{2gS} : Q$.

Es ist aber $\int Y^2 dY\,.\,\overline{(1-Y^2)}^2$

$$= Y . \int dY Y . (1 - \overline{Y^2})^2 - \int dY \int dY Y . (1 - \overline{Y^2})^2$$

$$= \frac{Y}{2(1 - Y^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dY}{(1+Y)(1-Y)}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{Y}{1 - Y^2} - \frac{1}{2} \log. \frac{1+Y}{1-Y} \right];$$

mithin wird:

$$v = c - \frac{N}{2} . \left[\frac{Y}{1 - Y^2} - \frac{1}{2} \log. \text{hyp.} \frac{1+Y}{1-Y} \right]$$

$$= c + \frac{N}{2} . \left[\frac{1}{2} \log. \frac{1+Y}{1-Y} - \frac{Y}{1-Y^2} \right].$$

Um die beständige Grösse c zu bestimmen, setze man für $t = 0$, $v = 0$; $x = 0$, so wird $Y = \sqrt{n}$; mithin

$$c = \left[\frac{\sqrt{n}}{1-n} - \frac{1}{2} \log. \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}} \right] \frac{N}{2}.$$

Am Ende des völligen Ausflusses der comprimirten Luft ist die Dichtigkeit der im Recipienten vorhandenen Luft gleich der Dichtigkeit der äusseren Luft. Es ist demnach:

$$M - x = A \Delta''; \quad x = M - A \Delta'';$$

mithin wird

$$\frac{nM - x}{M - x} = (n-1) M + A \Delta'' : A \Delta''.$$

Setzt man ferner die specifische Federkraft der comprimirten und der äusseren Luft einander gleich, oder $E = F$, so ist $n = 1 - \frac{\Delta''}{\Delta'}$; mithin wird

$$Y^2 = \frac{nM - x}{M - x} = (n-1)\,M + A\Delta'' : \Delta''$$

$$= -\frac{\Delta''}{\Delta'} A\Delta' + A\Delta'' : A\Delta'' = 0.$$

In dem Falle, wenn $E = F$, sind die Subtangenten S, S' gleichfalls einander gleich. Denn man bezeichne die absolute Federkraft der verschlossenen und der äusseren Luft mit A', A, so ist:

$$S : S' = \frac{A'}{\Delta'} : \frac{A}{\Delta''} = \frac{E\Delta'}{\Delta'} : \frac{F \,.\, \Delta''}{\Delta''} = E : F;$$

mithin ist $S = S'$ in dem Falle, wenn $E = F$.

Es ist demnach

$$N = (1-n)\,M \,.\, \sqrt{2gS} : Q = \frac{\Delta''}{\Delta'} \,.\, A\Delta' \sqrt{2gS'} : Q$$

$$= A\Delta'' \sqrt{2gS'} : Q.$$

Nach erfolgtem Ausflusse der comprimirten Luft und nach eingetretenem Gleichgewicht zwischen der absoluten Federkraft der inneren und der äusseren Luft wird demnach die folgende Gleichung für die anfängliche Geschwindigkeit v des Aërostaten Statt finden:

$$c \ldots v = \frac{A\Delta'' . \sqrt{2gS'}}{Q} \,.\, \tfrac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{n}}{1-n} - \tfrac{1}{2} \log.\,\text{hyp.}\, \frac{1 + \sqrt{n}}{1 - \sqrt{n}} \right].$$

Diese Gleichung wird eine einfachere Form erhalten, wenn das Volumen des Aërostaten $= V$ ge-

setzt wird; denn so ist für einen zum Theil gefüllten, mit dem Auftriebe der verdrängten atmosphärischen Luft im Gleichgewicht befindlichen Aërostaten, $Q = V\Delta''$; mithin

$$d \ldots v = \frac{A \cdot \sqrt{2gS'}}{V} \tfrac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{n}}{1-n} - \tfrac{1}{2} \log. \text{hyp.} \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}} \right].$$

Die Zeit des völligen Ausströmens der im Recipienten k, Fig. 3. Tafel IV., befindlichen comprimirten Luft sey $= T$, so wird vermöge der Gleichung $a \ldots$

$$e \ldots T = \frac{A}{h\sqrt{2g \cdot S'}} \cdot \log. \text{hyp.} \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}.$$

Die Wirkung der Compressionspumpe kann durch die folgende Gleichung berechnet werden:

$$f \ldots m = \frac{A}{a} \left(\frac{\Delta'}{\Delta''} - 1 \right), \text{*)}$$

wo A und a die Rauminhalte des Recipienten und des Stiefels der Pumpe; Δ'', Δ' aber die Dichtigkeiten der Luft im Recipienten, im Anfange und nach m Compressionen, bedeuten.

Es sey nun die geradlinichte Bahn, welche der Schwerpunkt des Aërostaten mit der anfänglichen

---

*) Georg Freiherr von Vega, Anleitung zur Hydrodynamik. Wien 1800. 2. Hauptstück, 11. Abschnitt, §. 77.

Geschwindigkeit v bei vollkommen ruhiger Luft binnen der Zeit t zurücklegen würde, $= y$; der Durchmesser des kugelförmigen Aërostaten $= D$, und $a' = \frac{4}{3} D$, so ist:

$$g \ldots y = 2a' . \text{log. hyp.} \left(1 + \frac{vt}{2a}\right) . \text{*)}$$

Da die Atmosphäre selten vollkommen ruhig ist, so wird der in der Atmosphäre frei schwimmende Aërostat, ausser der Geschwindigkeit v, zugleich die Geschwindigkeit des Windes haben; machen daher die beiden Linien, welche die Richtungen jener Geschwindigkeiten andeuten, einen gegebenen Winkel φ mit einander, so wird der Schwerpunkt des Aërostaten eine krumme Linie beschreiben.

Um nun die krummlinichte Bahn des Aërostaten durch eine Gleichung vorstellen zu können, sey die Geschwindigkeit des Windes $= C$, die Abscisse $= x$, eine auf die Abscissenlinie senkrechte Ordinate $= z$, und die Bahn, welche der Aërostat mit einförmiger Bewegung in der Richtung des Windes im Zeitraume t beschreiben würde, $= w = t . C$, so wird man erhalten:

$$h \ldots z = 2a' . \sin.\varphi . \text{log. hyp.} \left[1 + \frac{v . (x \pm z . \text{cotang.} \varphi)}{2a . C}\right].$$

*) Georg Freiherr von Vega, Anleitung zur Hydrodynamik. Wien 1800. 4. Hauptstück, 1. Abschnitt, §. 157. No. 6. VII.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$i \ldots x = \frac{2a'C}{v} \cdot \left(e^{\frac{z}{2a \cdot \sin.\varphi}} - 1\right) \mp z \cdot \text{cotang.}\,\varphi,$$

wo das negative Zeichen für $\varphi > 90°$, das positive Zeichen aber für $\varphi < 90°$ gilt.

Hat der Aërostat nicht die Gestalt einer Kugel, sondern etwa die Form des Körpers Fig. 1. Tafel I., so ist alsdann $a = \frac{2V}{F}$, wo V das Volumen, F aber die Stossfläche des Körpers bedeutet.

Die Kraft der Feder bei e, welche das Ventil d, Fig. 4. Tafel IV., andrückt, sey $= p$; die Subtangente der im Recipienten befindlichen comprimirten Luft $= S$, und die Dichtigkeit der comprimirten Luft $= \triangle'$, so wird

$$k \ldots p = h \cdot \triangle' \cdot S,$$

wenn h die Öffnung des Ventils bedeutet.

Setzt man den inneren Durchmesser des kegelförmigen Recipienten, Fig. 4. Tafel IV., $= fg = d$; die Höhe dh des Recipienten $= d : 2$; die Dicke ik der Seitenwände des Kegels $= i$, und die Dicke fl des Bodenstücks $= i'$, so ist mit Beibehaltung der Grössen S, $\triangle'$:

$$l \ldots i = \frac{d}{2} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{S\triangle'}{288 \cdot f} + 0{,}5\right)}\right],$$

wenn f die absolute Festigkeit der Materie bedeutet, woraus der Recipient verfertigt ist.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$A' = \frac{d^2 S \triangle'}{4 \,.\, 144 \,.\, f}; \; a' = i\sqrt{2}; \; b = i \,.\, \sqrt{2} + d,$$

so wird man die folgende Gleichung haben:

$$m \ldots i' = -\frac{(a'+b)}{2} \pm \sqrt{A' - a' \,.\, b + \frac{(a'+b)^2}{4}}.$$

Es sey nun ferner der äussere Durchmesser BC des Recipienten, Fig. 4. Tafel IV., $= D$; die Dicke der Seitenwände des Kegels und des Bodenstücks $= i''$; die specifische Schwere der Materie des Recipienten $= p$; sein Gewicht $= q$; und $\pi = 3{,}1416$: so giebt die nachstehende Gleichung das Gewicht des Recipienten:

$$n \ldots \quad q = \frac{D^2 \pi i'' \,.\, p}{4} \,.\, (1 + \sqrt{2}).$$

Um eine Anwendung von der Formel $d \ldots$ des gegenwärtigen Abschnitts auf die horizontale Bewegung kugelförmiger Aërostaten zu machen, sey $A = 2$ Cubikfuss; $S \,.\, \frac{3}{32} \,.\, 1 = 33 \,.\, 70 \,.\, 1 = 2310$ pariser Pfunde; mithin $S = 24640$ pariser Fuss. Setzt man nun $g = 30{,}1695$ par. Fuss, und den Durchmesser eines kugelförmigen Aërostaten $= 28$ par. Fuss, so wird das Volumen des Aërostaten $= V = 11498$ Cubikfuss; mithin $\sqrt{2gS} : 2V = 0{,}053023$; die folgende Gleichung giebt demnach die anfängli-

4*

che Geschwindigkeit des Aërostaten an, wenn A und n gegeben ist.

$$p \ldots v = 0{,}053023 . A . \left[\frac{\sqrt{n}}{1-n} - \tfrac{1}{2}\,\text{log. hyp.}\,\frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}\right].$$

Die comprimirte Luft in den Recipienten k, b, Fig. 3. Tafel IV., sey 100 Mal dichter als die äussere atmosphärische Luft; A sey = 2 Cubikfuss, und die Subtangente $S' = 24000$ par. Fuss: so wird in diesem Falle der Zahlencoefficient der vorhergehenden Gleichung = 0,05233011; mithin

$$q \ldots v = 0{,}05233 . A . \left[\frac{\sqrt{n}}{1-n} - \tfrac{1}{2}\,\text{log. hyp.}\,\frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}\right].$$

Für $n = 1 - \frac{\Delta''}{\Delta'} = 1 - \frac{1}{100}$, und $A = 2$ ist demnach die anfängliche Geschwindigkeit v = 10,230 pariser Fuss. Mit dieser anfänglichen Geschwindigkeit wird der kugelförmige Aërostat nach der Formel $g \ldots$ in einer Stunde 463,157 pariser Fuss zurücklegen.

Für den Aërostaten Fig. 1. Tafel I. wird die Grösse a der Formel $g \ldots = 2V : F = 2 . 16000 : F$; dieser Körper würde demnach, mit einer anfänglichen Geschwindigkeit von 10 Fuss, in einer Stunde 3352 pariser Fuss zurücklegen, wenn F = 8 □Fuss.

Um die Zeit zu finden, welche verfliesst, bis bei geöffnetem Ventil des Recipienten die absolute Fe-

derkraft der innern Luft der absoluten Federkraft der äussern Luft gleich ist, dient die Formel $e \ldots$. Es sey z. B. $n = \frac{90}{100}$, $A = 2$, $h = \frac{1}{14400}$ □Fuss, $S = 24000$ Fuss: so wird $t = 3$ Minuten 23,3 Secunden.

Die Kraft, womit die Feder das Ventil d, Fig. 4. Tafel IV., von Aussen nach Innen andrückt, ist nach der Formel $k \ldots$ $p = S\triangle''h = 24000 \cdot \frac{3}{32}\, 100 \frac{1}{14400}$ $= 15$ Pfund 21 Loth.

Das Äusserste, was man durch den Rückstoss comprimirter Luft mittelst der Recipienten k, b für die horizontale Bewegung der Aërostaten bewirken würde, ist, wenn die Expansion der comprimirten Luft der Kraft des in geladenen Gewehren entzündeten Schiesspulvers gleich gesetzt würde. Es sey demnach $\triangle'' : \triangle' = 1 : 1000$; mithin die comprimirte Luft 1000 Mal dichter als die äussere, so wird nach der Formel $q \ldots$, für $A = 2$ Cubikfuss, $v = 103{,}624$ Fuss. Gesetzt, es sey die anfängliche Geschwindigkeit $= 100$ Fuss, so wird nach der Formel $g \ldots$ der kugelförmige Aërostat von 28 Fuss Durchmesser in einer Stunde zwar etwas über eine Viertelmeile oder 6325 Fuss zurücklegen; die Wände der kegelförmigen Recipienten müssen aber bei so bedeutender Verdichtung der Luft eine Dicke von 1,29 Zoll haben, wenn der Durchmesser CB der

Recipienten $= 2{,}66841$ Fuss, das Volumen A aber $= 2$ Cubikfuss gesetzt wird. Denn nach der Formel $l \ldots$ ist für $\triangle' = 1000 . \triangle''$, $i = d . (0{,}04)$ $= 2{,}66841 . (0{,}04) = 1{,}29$ Zoll.

Setzt man aber $\triangle' = 100 . \triangle''$, so wird nach der Formel $l \ldots$ für $A = 2$ Cubikfuss, $d = 2{,}66841$ Fuss, $i = 0{,}13$ Zoll; man könnte demnach für $\triangle' = 1000 . \triangle''$, $i = 1{,}3$; und für $\triangle' = 100 . \triangle''$, $i = 0{,}2$ Zoll setzen.

Obgleich die Grösse i eigentlich nur die Dicke der Wände des Kegels CAB bedeutet, welche erforderlich ist, damit der Ring, dessen Schnitte fC, gB sind, den Druck der comprimirten Luft auf das Bodenstück aushalte: so ergiebt es sich doch durch nähere Berechnung, dass man die Wände der Recipienten durchweg von einerlei Dicke annehmen, mithin $i = i'$ setzen könne, ohne dass dadurch die Festigkeit der Recipienten geschwächt würde.

In diesem Falle könnte zu mehrerer Sicherheit die Dicke der Wände des Recipienten und seines Bodenstücks zu 0,4 bis 0,5 Zoll angenommen werden, denn so würde der Recipient eine 200malige, mithin um so sicherer eine 100fache Verdichtung der Luft aushalten. Aber auch bei dieser Annahme der Dicke der Wände des Recipienten würde man sich doch vor dem wirklichen Gebrauche zuerst durch

Proben von der Haltbarkeit der Recipienten versichern müssen.

Das Volumen eines jeden von den zwei Recipienten *k*, *b*, Fig. 3. Tafel IV., ist zwar nur zwei Cubikfuss angenommen worden, weshalb die Rechnung kein grösseres Resultat für den Werth der anfänglichen Geschwindigkeit geben konnte; wollte man aber, statt zweier Recipienten, sich eines einzigen bedienen und diesem ein bedeutendes Volumen geben, so würde ein solcher Recipient, nach der in obiger Art geführten Berechnung, nicht allein sehr schwer seyn, sondern auch die Gefahr des zufälligen Zersprengens des Gefässes für den Aëronauten höchst bedrohlich, gefährlich und durchaus verderblich seyn. Bei so grosser Gefahr würde demnach dieser Versuch unzulässig seyn.

Damit man den kugelförmigen Aerostaten um seine Verticale drehen könne, bringe man an dem hölzernen Reife, Fig. 3. Tafel IV., ein kleines Flügelrad *M* dergestalt an, dass es von der Gondel aus in Umlauf gesetzt werden könne, so wird dies Flügelrad in nachstehender Art zur willkürlichen Direction des Aërostaten dienen. Man gebe nämlich dem Luftball, solange derselbe noch vor Anker ist, mittelst eines gehörig angebrachten Steuerruders eine solche Lage, dass das Rohr *AC*, Fig. 3. Tafel IV.,

mit der Richtung des Windes den erforderlichen Winkel bilde, nachdem zuvörderst die Recipienten mit comprimirter Luft gefüllt worden. Hierauf öffne man das Ventil des einen Recipienten und lasse zugleich den zum Theil gefüllten Aërostaten frei, so wird derselbe bei seinem Aufsteigen, als Folge des geleerten Recipienten, eine zusammengesetzte Bewegung annehmen. Hat der Aërostat hierauf auf einer bestimmten Höhe die Geschwindigkeit des Windes erlangt, so drehe man nun den Aërostaten mittelst des Flügelrades *M* so lange um seine Verticale, bis der zweite annoch gefüllte Recipient die Stelle des geleerten Recipienten einnimmt, worauf dann das Ventil des gefüllten Recipienten gleichfalls geöffnet werden muss. Alsdann wird der leichter gewordene Aërostat höher steigen, zugleich aber seine Bahn mit zusammengesetzter Bewegung fortsetzen.

Damit der Aërostat durch den leer gewordenen Recipienten bei dem Aufsteigen nicht auf die Seite hänge, könnte zu diesem Behuf ein bewegliches Gegenwicht in der Gondel angebracht und vor dem Aufsteigen in die gehörige Lage gebracht werden.

Das Steuerruder müsste eine verticale Lage haben, wie eine Windfahne um eine feste Achse sich drehen lassen und dann in die erforderliche Lage sich feststellen lassen. Dies Steuerruder wird man

am schicklichsten über dem horizontalen Reifen *AC*, Fig. 3. Tafel IV., zwischen dem Luftball und dem Reifen anbringen. Es müsste übrigens eine Vorrichtung angebracht werden, damit das Steuerruder von der Gondel aus so befestigt werden kann, dass seine Fläche mit dem Rohr *AC* den erforderlichen Winkel bilde.

Wird der Cubikfuss Luft auch nur zu 2 Loth, das Volumen des Recipienten aber zu 2 Cubikfuss angenommen, so wird in der Voraussetzung, dass die im Recipienten befindliche comprimirte Luft 100 Mal dichter als die äussere sey, das Gewicht des Recipienten um 12 Pfund 12 Loth schwerer geworden seyn; mithin wird die am Aërostaten hängende Last nach geöffnetem Ventil des Recipienten um 12 Pfund 12 Loth leichter werden, daher dann der Aërostat zu einer bestimmten Höhe über dem Horizonte steigen wird, wenn man nachher auch den zweiten Recipienten öffnet.

Soll der zum Theil gefüllte Aërostat von jener Höhe wieder herabsinken, so dürfte die Luft in den Recipienten nur mittelst der Compressionspumpe von neuem in gehörigem Grade verdichtet werden; denn so würde bei einer 100fachen Verdichtung der Luft der Ballast des Aërostaten einen Zuwachs von 24 Pfunden erhalten, mithin wird der Aërostat sinken.

Denn es sey das Volumen des Recipienten $= A$, die Dichtigkeit der comprimirten Luft $= \triangle'$, und der Zuwachs an Gewicht $= P$, so ist in dem Falle, wenn die Dichtigkeit der äusseren Luft $= \triangle''$, und $\triangle' = n\triangle''$; $P = A \cdot \triangle'' (n-1) = \frac{2 \cdot 2 (100-1)}{32}$ $=$ 12 Pfund 12 Loth; mithin wird der Gewichtzuwachs für beide Recipienten 24 Pfund 24 Loth betragen.

Im elften Abschnitt ist nachgewiesen worden: dass ein kugelförmiger Aërostat von 28 Fuss Durchmesser, mittelst des Flügelrades, Fig. 1. Tafel IV., in einer Stunde 20484 rheinl. Fuss in horizontaler Richtung zurücklegen würde, wenn das Flügelrad von der Gondel aus durch einen Menschen in Umlauf gesetzt wird. Diese Bewegung fände nicht nur bei Windstille, sondern auch dann Statt, wenn der Ball die Geschwindigkeit des Windes bereits erlangt hat. Nach dem Vorhergehenden würde hingegen der kugelförmige Aërostat durch den Rückstoss comprimirter Luft, selbst unter vortheilhaften Umständen, dennoch nur einen mässigen Raum während einer Stunde zurücklegen; denn bei einer tausendmaligen Verdichtung der Luft in den Recipienten *k*, *b*, Fig. 3. Tafel IV., würde bei geöffnetem Ventil die Bahn des Luftballs in einer Stunde nur 6547 rheinl. Fuss betragen.

Da es ferner nach dem Vorhergehenden nicht räthlich ist, statt der Recipienten, Fig. 3. Taf. IV., einen einzigen Recipienten von bedeutendem Volumen zu substituiren, so folgt hieraus, dass es vortheilhafter, sicherer und zweckmässiger sey, die Aërostaten durch Flügelräder als durch den Rückstoss comprimirter Luft zu dirigiren. Es ist übrigens für sich klar, dass man den Aërostaten auch mittelst des Flügelrades eine anfängliche Geschwindigkeit ertheilen könne, wenn das Flügelrad von Zeit zu Zeit in Umlauf gesetzt würde.

Da ein Aërostat von der Form Fig. 1. Taf. I., nach den vorhergehenden Abschnitten, ganz vorzüglich sich zur willkürlichen Direction eignet, durch einen mässigen Kraftaufwand nicht nur eine horizontale Bahn von drei geographischen Meilen in einer Stunde zurücklegen, sondern unter gewissen Umständen selbst gegen den Wind laviren würde, und auch durch Segel dirigirt werden kann: so füge ich schliesslich hier eine Tafel bei, nach welcher die Hülle eines Aërostaten von der Form Fig. 1. Tafel I. construirt werden könnte.

Es sey zu diesem Behuf $ikCi$, Fig. 5. Taf. IV., die Hälfte eines ebenen Streifens, der von krummen Linien begrenzt ist und eine solche Figur hat, dass, wenn mehrere dergleichen Segmente ihrer Länge

nach mit ihren Rändern zusammengefügt werden, man die krumme Oberfläche eines Körpers erhalten würde, der aus der Umdrehung des Kreissegments ACB, Fig. 1. Tafel I., um die Sehne AB erzeugt wird. Es sey ferner $CD = 2h$, $CD : AB = 1 : n$, so ist nach §. 5. $At = nh$; $\psi = \text{arc. sin.} \frac{2n}{1+n^2}$. Setzt man nun, der Kreisbogen $\frac{1}{2}ACB$, Fig. 1. Taf. I., sey der geraden Linie EC, Fig. 5. Taf. IV., gleich; diese Gerade EC sey in neun gleiche Theile, Eh, hg, gf, fe, ed, dc, cb, ba, aC, eingetheilt; die gerade Linie ki aber sey der $m$te Theil von der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser $= h$; und es sey $n = 10$, $m = 20$, $h = 8$ pariser Fuss: so wird man für die geraden Linien der 5. Fig. Tafel IV. die folgenden Werthe haben.

$Eh = hg = gf = fe = ed = dc = cb = ba = aC = h \,.\, (1+n^2) \,.\, \psi : 2 \,.\, 9 = 8{,}948$ Fuss.

$EC = \frac{1}{2}h(1+n^2)\psi = h \,.\, (10{,}066529) = 80{,}533$ Fuss.

$Ek = nh : m = h \,.\, (0{,}1571) = 1{,}257$ Fuss.

$hl = nh[(1+n^2) \,.\, \cos. \frac{1}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h \,.\, (0{,}15515) = 1{,}241$ Fuss.

$gn = nh[(1+n^2) \,.\, \cos. \frac{2}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h \,.\, (0{,}14931) = 1{,}194$ Fuss.

$fq = nh[(1+n^2) \,.\, \cos. \frac{3}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h \,.\, (0{,}13965) = 1{,}117$ Fuss.

$er = nh[(1+n^2) \,.\, \cos. \frac{4}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h \,.\, (0{,}12598) = 1{,}008$ Fuss.

$$du = \pi h[(1+n^2).\cos.\tfrac{5}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h.(0{,}10897)$$
$$= 0{,}868 \text{ Fuss.}$$
$$cv = \pi h[(1+n^2).\cos.\tfrac{6}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h.(0{,}08814)$$
$$= 0{,}705 \text{ Fuss.}$$
$$bx = \pi h[(1+n^2).\cos.\tfrac{7}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h.(0{,}06193)$$
$$= 0{,}495 \text{ Fuss.}$$
$$az' = \pi h[(1+n^2).\cos.\tfrac{8}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h.(0{,}03288)$$
$$= 0{,}263 \text{ Fuss.}$$

Nach dieser Tafel kann nun zuvörderst ein Muster aus Starrleinwand verfertigt werden, dann aber kann man die Segmente aus gefirnisstem luftdichtem Taffet nach diesem Muster zuschneiden.

Der Aërostat, dessen Hülle nach der obigen Tafel sich construiren lässt, kann nicht allein bei Windstille mit bedeutender Geschwindigkeit in jeder beliebigen Richtung in der Horizontalebene durch das Flügelrad dirigirt, sondern auch einem Winde von 15 Fuss Geschwindigkeit durch Laviren entgegenbewegt werden; man wird daher meistens nahe an der Erde die Atmosphäre beschiffen können und nicht genöthigt seyn, zur Gewinnung des erforderlichen Spielraumes, über die Wolken oder wenigstens zu einer sehr bedeutenden Höhe zu steigen, wie es bei kugelförmigen Aërostaten erforderlich seyn dürfte.

Berichtigung.

In der Zeichnung zur Theorie der Aëronautik ist auf dem zweiten Blatte der Durchmesser des Wellrades *B* unrichtig kleiner angenommen worden als der Durchmesser des Wellrades *A*; dieser sollte hingegen weniger betragen als der erstere, denn nach der Berechnung §. 11. verhalten sich die Durchmesser der Wellräder *A* und *B* wie 1 zu 2.

Verbesserungen.

Seite 24, Zeile 9, steht $i=l$ statt $i=1$.

— 26 fehlt in der Figur der Buchstabe b.

— 26, Zeile 6 und 7, steht:

$$r\varrho \cos.\varphi + u \sin.\varphi - C \sin.\varphi = r\varrho \cos.\varphi + (C-u) \sin.\varphi;$$

statt:

$$r\varrho \cos.\varphi + u \sin.\varphi - C \sin.\varphi = r\varrho \cos.\varphi - (C-u) \sin.\varphi.$$

Seite 27, Zeile 13, steht:

$$0=(n^2-1)^2.n\mathfrak{F}DV^3\sin.^3\varphi-2g\frac{m\pi r'}{R},$$

statt:

$$0=(n-1)^2.n\mathfrak{F}DV^3\sin.^3\varphi-2g\frac{m\pi r'}{R}.$$

Seite 27, Zeile 16, steht:

$(n^2-1)^2=B:\sin.^3\varphi.\mathfrak{F}$, statt: $(n-1)^2=B:\sin.^3\varphi.\mathfrak{F}$.

Seite 36, Zeile 4, steht:

5,69 rheinl. Fuss, statt: 5,69.. rheinl. Fuss.

Seite 47, Zeile 1 und 2, steht:

$$Y^2=(n-1)M+A\triangle'':\triangle''$$
$$=-\frac{\triangle''}{\triangle'}A\triangle'+A\triangle'':A\triangle''=0,$$

statt:

$$Y^2=[(n-1)M+A\triangle'']:A\triangle''$$
$$=\left[-\frac{\triangle''}{\triangle'}A\triangle'+A\triangle''\right]:A\triangle''=0.$$

Seite 50, Zeile 10, steht:

die Subtangente der im Recipienten befindlichen comprimirten Luft, statt: die Subtangente der atmosphärischen Luft.

Seite 51, Zeile 2, steht:

$$A' = \frac{d^2\, S \triangle'}{4 . 144 . f}, \quad \text{statt:} \quad A' = \frac{d^2\, S \triangle'}{16 . 144\, f}.$$

Seite 51, Zeile 16, steht:

$$S . \tfrac{3}{32} . 1 = 33 . 70 . 1 = 2310,$$

statt:

$$\tfrac{3}{32}\, S = 33 . 70 = 2310.$$

Seite 60, Zeile 16, steht:

$$Eh = hg = gf = fe = ed = dc = cb = ba = aC = h . (1 + n^2) . \psi : 2 . 9 = 8{,}948 \text{ Fuss.}$$

statt:

$$Eh = hg = gf = fe = ed = dc = cb = ba = \frac{h . (1 + n^2)\, \psi}{2 . 9} = 8{,}942 \text{ Fuss.}$$

Seite 60, Zeile 18, steht:

$$EC = \tfrac{1}{2}\, h . (1 + n^2)\, \psi = h . (10{,}066529) = 80{,}533 \text{ Fuss,}$$

statt:

$$EC = \tfrac{1}{2}\, h . (1 + n^2)\, \psi = h . (10{,}0664629) = 80{,}532 \text{ Fuss.}$$

Seite 60, Zeile 20, steht:

$$hl = \pi h\, [(1 + n^2) \cos . \tfrac{1}{9}\, \psi - (n^2 - 1)] : 2m = h\, (0{,}15515) = 1{,}241 \text{ Fuss,}$$

statt:

$$hl = \pi h\, [(1 + n^2) \cos . \tfrac{1}{9}\, \psi - (n^2 - 1)] : 2m = h\, (0{,}15519) = 1{,}241 \text{ Fuss.}$$

Seite 60, Zeile 22, steht:

$$gn = \pi h\, [(1 + n^2) \cos . \tfrac{2}{9}\, \psi - (n^2 - 1)] : 2m = h\, (0{,}14931) = 1{,}194 \text{ Fuss,}$$

statt:

$$gn = \pi h\, [(1 + n^2) \cos . \tfrac{2}{9}\, \psi - (n^2 - 1)] : 2m = h\, (0{,}14936) = 1{,}194 \text{ Fuss.}$$

Seite 60, Zeile 24, steht:

$$fq = \pi h\, [(1 + n^2) \cos . \tfrac{3}{9}\, \psi - (n^2 - 1)] : 2m = h\, (0{,}13965) = 1{,}117 \text{ Fuss,}$$

statt:

$$fq = \pi h\, [(1 + n^2) \cos . \tfrac{3}{9}\, \psi - (n^2 - 1)] : 2m = h\, (0{,}13964) = 1{,}117 \text{ Fuss.}$$

Seite 60, Zeile 26, steht:

$$er = \pi h\, [(1 + n^2) \cos . \tfrac{4}{9}\, \psi - (n^2 - 1)] : 2m = h\, (0{,}12598) = 1{,}008 \text{ Fuss,}$$

statt:

$$er = \pi h\, [(1 + n^2) \cos . \tfrac{4}{9}\, \psi - (n^2 - 1)] : 2m = h\, (0{,}1261) = 1{,}009 \text{ Fuss.}$$

Seite 61, Zeile 1, steht:

$du = \pi h\,[(1+n^2)\cos.\tfrac{5}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h\,(0{,}10897)$
$= 0{,}868$ Fuss,

statt:

$du = \pi h\,[(1+n^2)\cos.\tfrac{5}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h\,(0{,}10856)$
$= 0{,}868$ Fuss.

Seite 61, Zeile 3, steht:

$cv = \pi h\,[(1+n^2)\cos.\tfrac{6}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h\,(0{,}08814)$
$= 0{,}705$ Fuss,

statt:

$ev = \pi h\,[(1+n^2)\cos.\tfrac{6}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h\,(0{,}0872)$
$= 0{,}697$ Fuss.

Seite 61, Zeile 5, steht:

$bx = \pi h\,[(1+n^2)\cos.\tfrac{7}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h\,(0{,}06193)$
$= 0{,}495$ Fuss,

statt:

$bx = \pi h\,[(1+n^2)\cos.\tfrac{7}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h\,(0{,}0448)$
$= 0{,}358$ Fuss.

Seite 61, Zeile 7, steht:

$az' = \pi h\,[(1+n^2)\cos.\tfrac{8}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h\,(0{,}03288)$
$= 0{,}263$ Fuss,

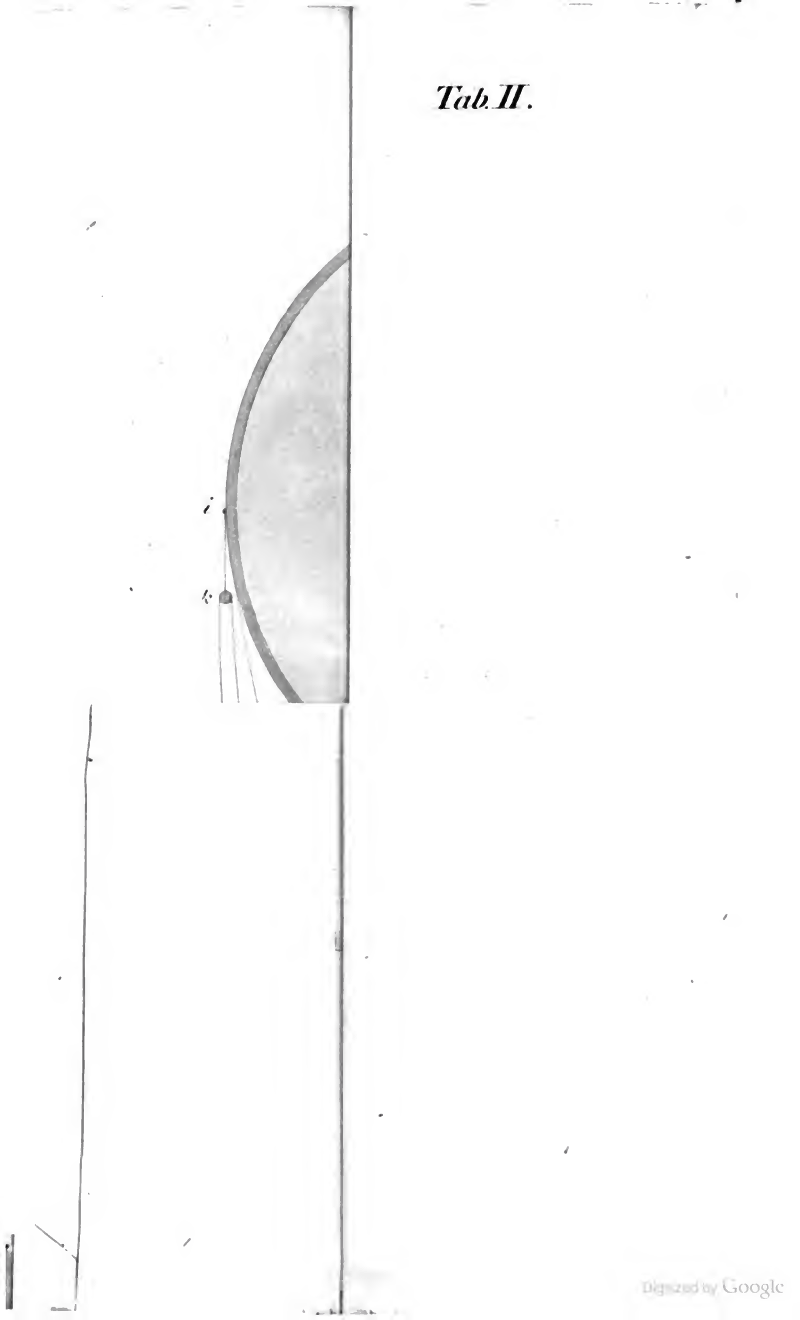
statt:

$az' = \pi h\,[(1+n^2)\cos.\tfrac{8}{9}\psi - (n^2-1)] : 2m = h\,(0{,}0106)$
$= 0{,}085$ Fuss.

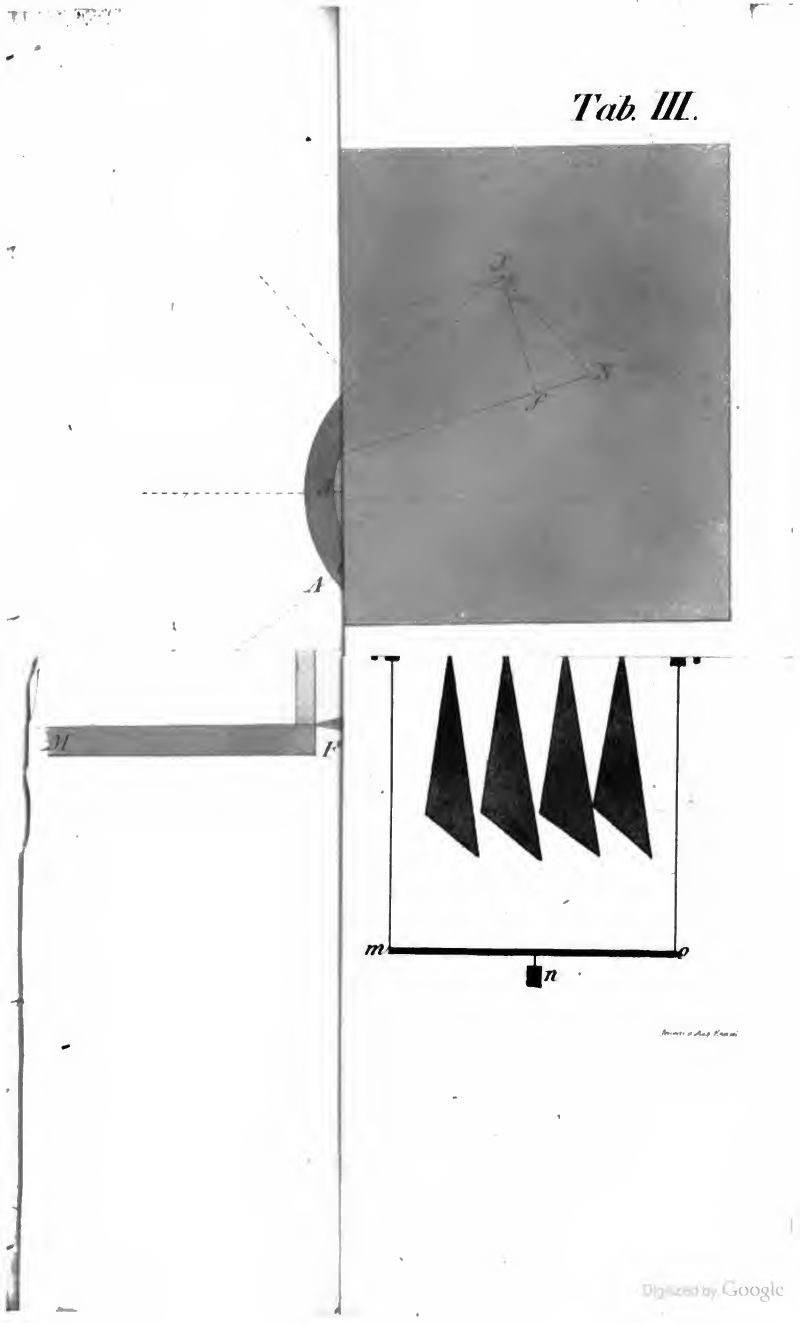
---

ig. 1.

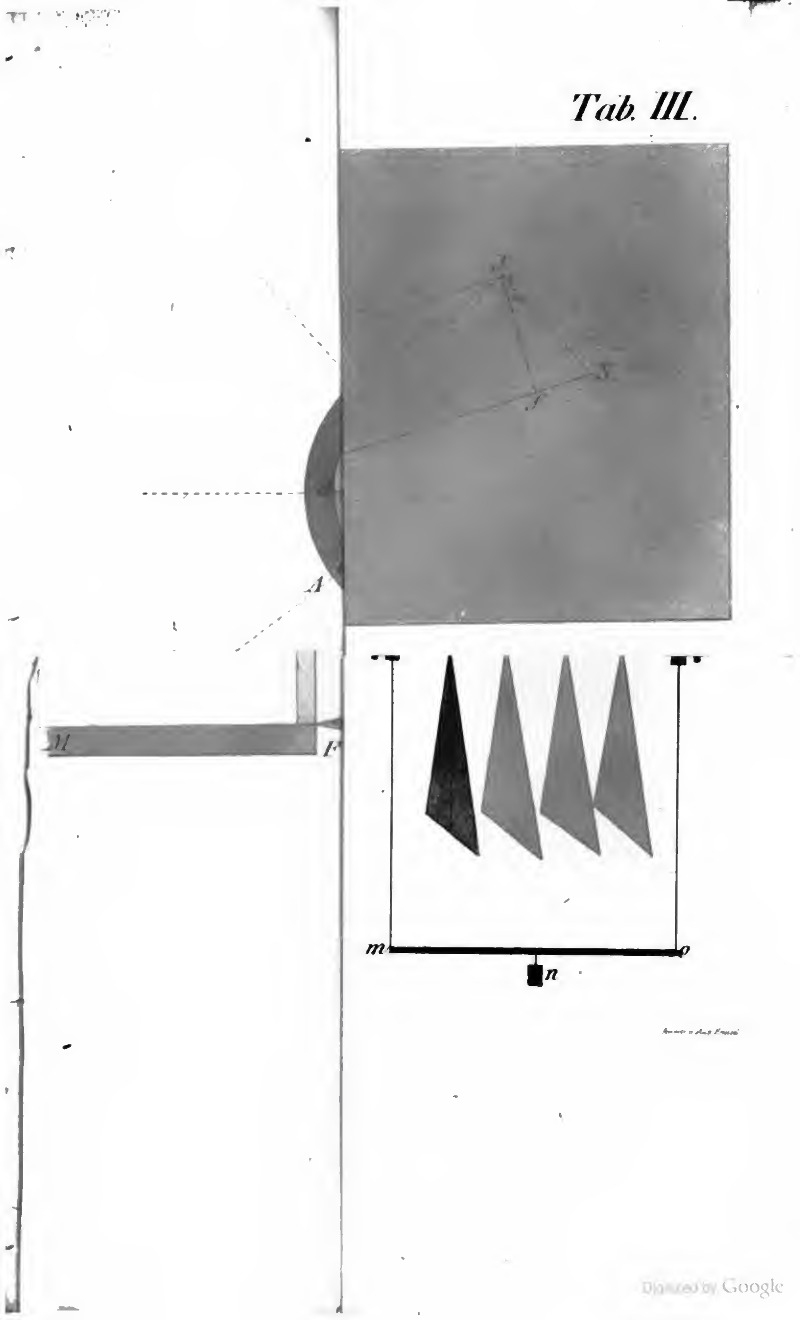
im Verlag bei C.


Tab. II.
i
k

Tab. III.






Tab. III.
A
M
F
m
n
o



Tab. IV.

Fig. 2.

n
a
u v r
d
M
b t
h
G g
g'
B g
k l n
E k
h
i m o

Zur Th

